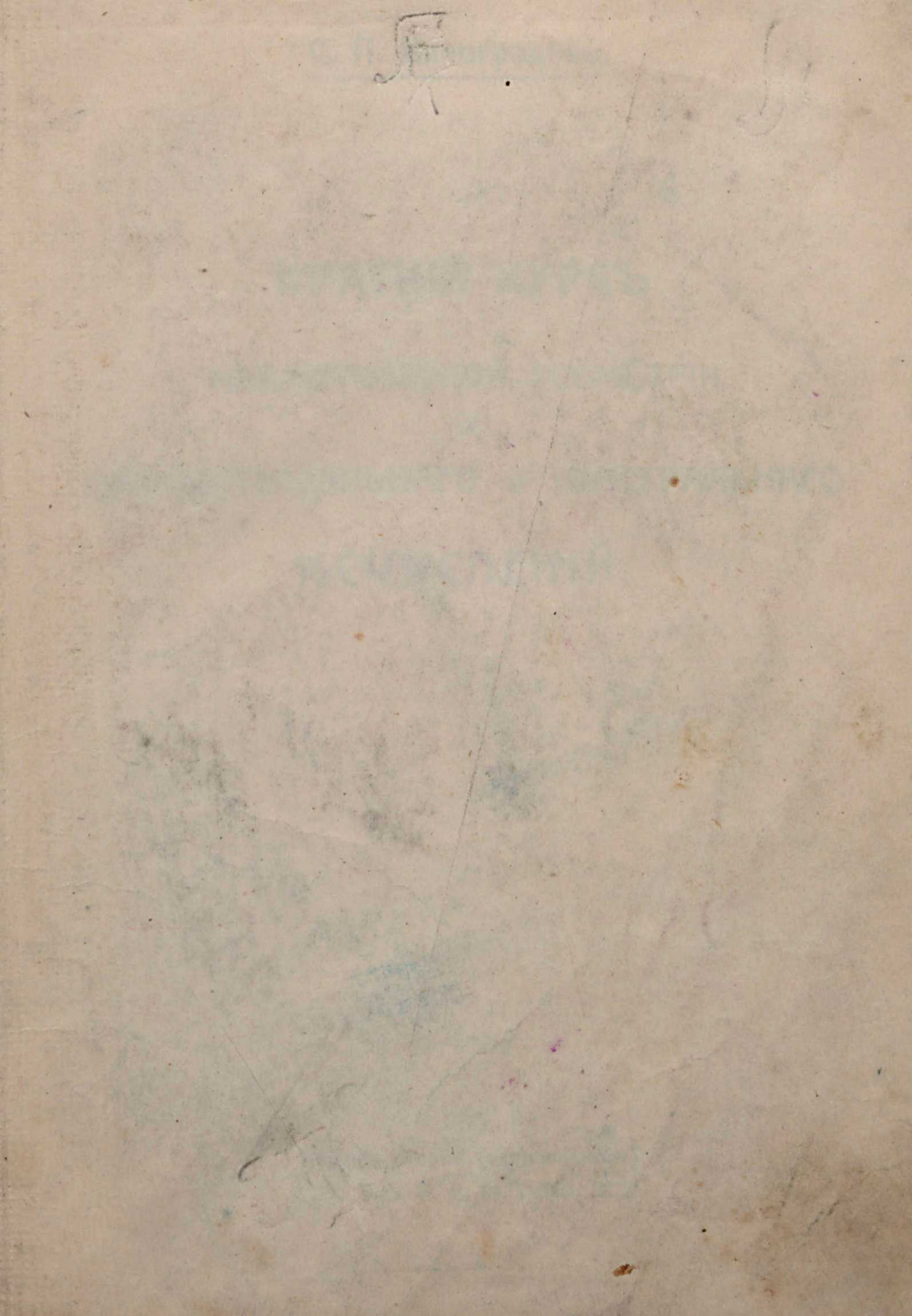
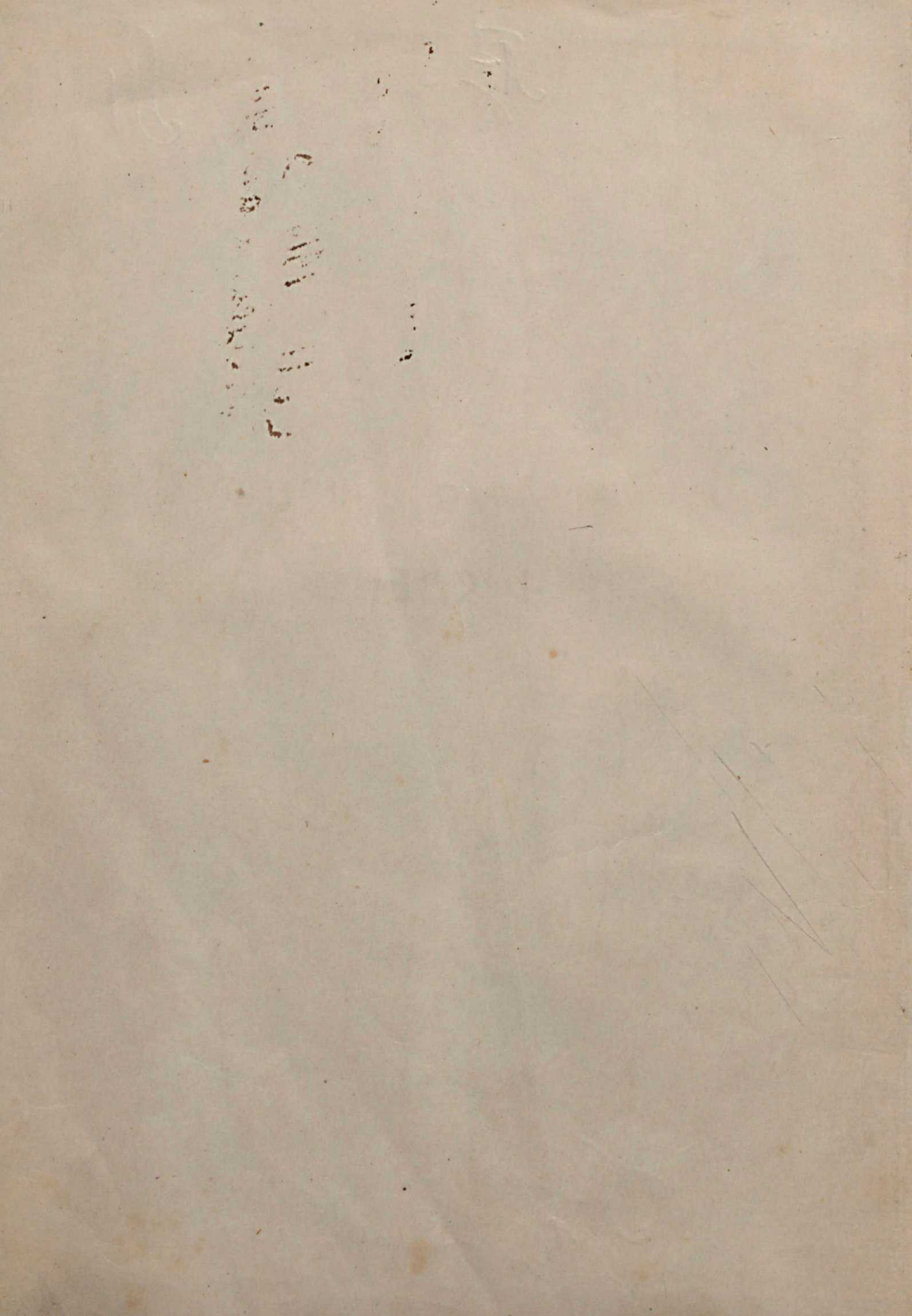
С. П. ВИНОГРАДОВЪ

КРАТКІЙ КУРСЪ

АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ
И
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО и ИНТЕГРАЛЬНАГО
ИСЧИСЛЕНІЙ.





С. П. Виноградовъ.

КРАТКІЙ КУРСЪ

АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ

и

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО и ИНТЕГРАЛЬНАГО

ИСЧИСЛЕНІЙ.

Изданіе второе (исправленное)

Т-ва И. Д. СЫТИНА.





Типографія Т-ва И. Д. Сытина. Пятницкая ул., с. д.
МОСКВА.—1915.

ПРЕДИСЛОВІЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНІЮ.

Второе изданіе „*Краткаго курса аналитической геометріи и дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій*“ имѣетъ ту же цѣль, которую преслѣдовало его первое изданіе, а именно: служить пособіемъ при изученіи элементовъ высшей математики для тѣхъ лицъ, которымъ приходится имѣть дѣло съ приложеніями математики въ естествознаніи, техникѣ и общественныхъ наукахъ.

Въ курсѣ имѣются два шрифта, при чемъ мелкимъ шрифтомъ напечатаны тѣ главы и параграфы, которые могутъ быть опущены при первомъ ознакомленіи съ основами аналитической геометріи и дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

Измѣненія, сдѣланныя во второмъ изданіи, помимо редакціонныхъ поправокъ, сводятся къ перемѣнѣ въ расположеніи матеріала, относящагося къ производнымъ высшихъ порядковъ, нѣкоторымъ сокращеніямъ въ ученіи о показательной функціи, нѣкоторому расширенію главы о рядахъ и увеличенію числа упражненій на изслѣдованіе измѣненія функціи.

Мартъ, 1915 г.

С. Виноградовъ.

ВВЕДЕНІЕ.

Въ курсѣ такъ называемой элементарной математики полагается основаніе знакомству съ тремя основными математическими понятіями, а именно: съ понятіемъ *числа*, *уравненія* и *функціи*. *Первому* изъ нихъ въ средней школѣ удѣляется наибольшее вниманіе и отводится наибольшее время. Въ *ариѳметикѣ* разсматривается сначала *счетъ*, какъ первый основной процессъ, который приводитъ къ результату, выражающемуся числомъ; затѣмъ изучаются дѣйствія надъ натуральными числами, являющимися результатомъ счета, и указываются нѣкоторыя ихъ свойства; наконецъ дѣлаются первые шаги на пути *расширенія* понятія числа, а именно: вводятся число *нуль* и *дробныя числа*, и указывается второй основной процессъ полученія числа: *измѣреніе*.

Дальнѣйшее изученіе числа переносится обыкновенно въ курсъ *алгебры*. Здѣсь разсматривается дальнѣйшее расширеніе понятія числа и вводятся числа *отрицательныя*, *ирраціональныя* и *комплексныя*.

Второму основному понятію — понятію *уравненія* — отводится несравненно меньше времени и мѣста. Изучаются лишь уравненія первой и второй степеней и нѣкоторыя уравненія, приводящіяся къ уравненіямъ второй степени.

Наконецъ *третьему* основному понятію—понятію *функціи*— въ средней школѣ или совсѣмъ не оказывается мѣста, или удѣляется весьма мало времени и вниманія.

Кромѣ ариѳметики и алгебры, въ курсъ математики средней школы входятъ еще *геометрія* и *тригонометрія*. Та и другая представляютъ обыкновенно обособленныя части, и, если въ геометрическихъ задачахъ на вычисленіе пользуются ариѳметикой и алгеброй, то въ ариѳметикѣ и алгебрѣ обыкновенно не прибѣгаютъ къ помощи геометрическихъ иллюстрацій и интерпретацій.

Описанный выше въ краткихъ чертахъ обычный курсъ элементарной математики содержитъ въ себѣ *почти* только то, что было достояніемъ науки *до XVII* столѣтія. Изъ математическихъ открытій, сдѣланныхъ съ *XVII* столѣтія, въ элементарный курсъ

вошла только теорія логариѳмовъ и начинаютъ входить ученія о координатахъ и функціи.

Такимъ образомъ создалась отсталость общеобразовательнаго курса математики отъ ея современнаго состоянія болѣе, чѣмъ на 300 лѣтъ. Между тѣмъ приложенія математики къ вопросамъ естествознанія, техники, статистики, политической экономіи, финансовыхъ вычисленій, страхового дѣла съ каждымъ годомъ расширяются, и лица, занимающіяся этими предметами, встрѣчаютъ не малыя затрудненія, если они обладаютъ только тѣми математическими знаніями, которыя даетъ обычный курсъ элементарной математики.

Приложенія математики требуютъ знанія способовъ относиться къ явленіямъ природы и соціальной жизни не только съ точки зрѣнія наблюдателя, регистрирующаго явленія, но и съ точки зрѣнія ученаго или практическаго дѣятеля, который долженъ умѣть *учесть* наблюдаемые факты въ интересахъ своего дѣла.

Наблюденіе явленій природы и соціальной жизни, какъ бы поверхностно оно ни было, указываетъ намъ два факта. Первый изъ нихъ—*измѣняемость*. Наприм., камень, брошенный вверхъ, мѣняетъ свое положеніе въ пространствѣ, температура въ различные часы дня различна и т. д. Второй фактъ — *соизмѣняемость*. Напр., наибольшая высота, которой достигаетъ брошенный вверхъ камень, измѣняется вмѣстѣ съ силой первоначальнаго толчка; температура воздуха измѣняется при измѣненіи высоты солнца и т. д.

Чтобы имѣть возможность сдѣлать наблюденіе объектомъ математическаго изслѣдованія, нужно 1) *измѣрить* интересующую насъ величину, т.-е. выразить ее *числомъ*, и 2) *сопоставить* полученныя при этомъ числа съ другимъ рядомъ или другими рядами чиселъ, выражающихъ результаты измѣренія другой величины или другихъ величинъ, совмѣстно съ первой измѣняющихся.

Такое изученіе совмѣстныхъ измѣненій даетъ намъ возможность судить о *зависимости* двухъ или нѣсколькихъ величинъ.

Обыкновенно зависимости, которыя представляются намъ природой и жизнью, оказываются весьма сложными. Сохраняя сущность задачи, математика упрощаетъ ее, разсматривая сначала зависимость только между *двумя*, а потомъ между *многими* величинами, и предполагая при этомъ возможность выразить эту зависимость посредствомъ *уравненія*.

Величина, способная измѣняться, т.-е. принимать различныя значенія, называется *перемѣнной* величиной. Изъ двухъ перемѣнныхъ величинъ, измѣняющихся въ зависимости одна отъ другой, одна называется *независимой* перемѣнной, а другая ея *функціей*. Точно также изъ многихъ перемѣнныхъ величинъ, измѣненія

которыхъ связаны между собою, одна называется *функціею* остальныхъ. Зависимость же между величинами называется *функціональною.*

Методы изслѣдованія функціональной зависимости не входятъ въ курсъ элементарной математики. Приложенія же математики въ различныхъ отрасляхъ знанія требуютъ знакомства именно съ этими методами. Поэтому центральнымъ понятіемъ краткаго курса высшей математики, назначеннаго для не-спеціалистовъ, является понятіе *функціи,* а задачей его—ознакомленіе съ основными методами изслѣдованія *функціональной зависимости.*

Эти методы излагаются въ **аналитической геометріи** и въ **исчисленіи безконечно малыхъ,** которое распадается на двѣ части: **дифференціальное и интегральное исчисленія.**

Основанія этихъ отдѣловъ математики и составляютъ содержаніе настоящаго курса.

ГЛАВА I.

Координаты точки на прямой, на плоскости и въ пространствѣ.

§ 1. Координата точки на прямой. Для того, чтобы опредѣлить положеніе точки на прямой, возьмемъ на этой прямой произвольную точку O, которую будемъ называть *началомъ* (черт. 1). Точка P этой прямой будетъ вполнѣ опредѣлена, если будетъ дано *разстояніе* ея отъ точки P, т.-е. *длина* отрѣзка OP, и *направленіе* этого отрѣзка. Длина отрѣзка получается, какъ результатъ измѣренія его какой-нибудь *единицей длины*, а направленіе можно различать знаками $+$ и $-$, условившись, напр., считать *положительными* отрѣзки, откладываемые *вправо* отъ точки O, и *отрицательными*—отрѣзки, откладываемые *влѣво* отъ нея, и присоединять знакъ $+$ къ числу, выражающему длину первыхъ, и знакъ $-$ къ числу, выражающему длину вторыхъ.

Принявъ такое условіе, мы получимъ для каждой точки прямой *единственное* число, которое называется *абсциссой* этой точки и обозначается обыкновенно буквой x.

O A P B

Черт. 1.

Обратное также справедливо: каждому числу (вещественному) соотвѣтствуетъ на прямой *единственная* точка. Такимъ образомъ между *точками прямой* съ одной стороны и *числами* съ другой устанавливается взаимное однозначное соотвѣтствіе.

Точку P, абсцисса которой равна x, можно обозначать символомъ $P(x)$.

Упражненія. 1. *Построить точки* $P(+2)$, $P(-3)$, $P(0)$, $P(\sqrt{2})$.

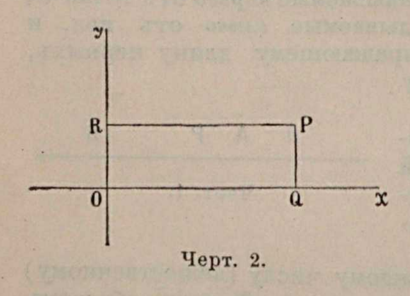
2. *Показать, что разстояніе AB между точками $A(a)$ и $B(b)$ равно $b-a$. Разсмотрѣть частные случаи, когда* $a=3$, $b=4$; $a=4$, $b=3$; $a=0$, $b=-1$; $a=-1$, $b=0$; $a=-2$, $b=-3$; $a=-2$, $b=3$.

Если точка P движется по прямой, описывая отрѣзокъ AB, то абсцисса ея измѣняется и принимаетъ послѣдовательно *всѣ* значенія, начиная съ абсциссы a точки A и кончая абсциссой b точки B. Кратко это выражается такъ: x измѣняется *непрерывно* отъ a до b.

§ 2. **Прямоугольныя координаты точки на плоскости.** Для опредѣленія положенія точки на плоскости возьмемъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, пересѣкающіяся въ точкѣ O (черт. 2). На каждой изъ нихъ укажемъ то направленіе, которое будемъ считать *положительнымъ*.

Пусть эти направленія суть Ox и Oy. Отрѣзки, откладываемые въ этихъ направленіяхъ какъ на взятыхъ нами прямыхъ, такъ и на прямыхъ, имъ параллельныхъ, принимаются за *положительные*, а откладываемые въ противоположныхъ направленіяхъ—за *отрицательные*.

Чтобы опредѣлить положеніе какой-нибудь точки P плоскости относительно прямыхъ Ox и Oy, опустимъ изъ нея перпендикуляры PQ и PR соотвѣтственно на прямыя Ox и Oy. Отрѣзокъ RP есть разстояніе *отъ* прямой Oy *до* точки P, а отрѣзокъ QP — разстояніе *отъ* прямой Ox до точки P. Измѣривъ эти отрѣзки опредѣленной единицей длины и принявъ во вниманіе условіе относительно знаковъ отрѣзковъ, мы получимъ *пару* чиселъ, соотвѣтствующихъ точкѣ P. Эта пара чиселъ называется *координатами* точки P. Число, выражающее мѣру разстоянія RP точки P отъ прямой Oy, называется *абсциссой*, а число, выражающее мѣру разстоянія QP точки P отъ прямой Ox, — *ординатой* точки P. Абсцисса точки обозначается обыкновенно буквой x, а ордината—буквой y. Прямыя Ox и Oy называются *осями* координатъ, ось Ox—осью $x^{овъ}$ или *осью абсциссъ*, а Oy—осью $y^{овъ}$ или осью *ординатъ*.



Черт. 2.

Точка P съ координатами $x = a$ и $y = b$ обозначается символомъ P (a, b).

Обратно, *каждой парѣ чиселъ соотвѣтствуетъ на плоскости единственная точка*. Если данная пара чиселъ есть (a, b), то точка, ей соотвѣтствующая, лежитъ на пересѣченіи двухъ прямыхъ, изъ которыхъ одна параллельна оси $y^{овъ}$ и отстоитъ отъ нея на разстояніи a, а другая параллельна оси $x^{овъ}$ и отстоитъ отъ нея на разстояніи b.

Такимъ образомъ устанавливается взаимное однозначное соотвѣтствіе между *точками плоскости* съ одной стороны и *парами чиселъ* (вещественныхъ) съ другой.

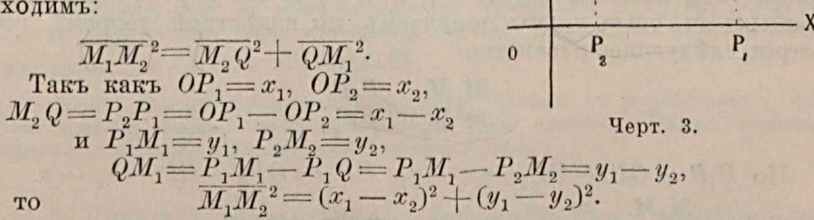
Точки оси $x^{овъ}$ имѣютъ *ординату*, равную *нулю;* точки оси $y^{овъ}$ имѣютъ *абсциссу*, равную *нулю*. Начало координатъ, т.-е. точка O, имѣетъ обѣ координаты, равныя нулю.

Выраженiе: *„точка дана“* обозначаетъ, что координаты ея извѣстны; выраженiе: *„найти точку“* указываетъ требованiе найти ея координаты.

Упражненiя. 1. *Построить точки:* (2, 3); (— 2, 3); (— 2, — 3); (2, — 3). 2. *Построить точки:* (0, — 1); (— 1, 0).

3. *Построить точки:* $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$; $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

§ 3. **Разстоянiе между двумя точками.** Пусть даны двѣ точки: M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2). Требуется найти разстоянiе между ними. Разстоянiе между точками M_1 и M_2 выражается отрѣзкомъ M_1M_2 (черт. 3). Для опредѣленiя его опустимъ изъ данныхъ точекъ перпендикуляры M_1P_1 и M_2P_2 на ось абсциссъ и проведемъ прямую M_2Q параллельно оси x до встрѣчи въ точкѣ Q съ прямой M_1P_1. Изъ полученнаго при этомъ построенiи прямоугольнаго треугольника M_2QM_1 находимъ:



Черт. 3.

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_2Q}^2 + \overline{QM_1}^2.$$

Такъ какъ $OP_1 = x_1$, $OP_2 = x_2$,

$$M_2Q = P_2P_1 = OP_1 - OP_2 = x_1 - x_2$$

и $P_1M_1 = y_1$, $P_2M_2 = y_2$,

$$QM_1 = P_1M_1 - P_1Q = P_1M_1 - P_2M_2 = y_1 - y_2,$$

то

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Отсюда получаемъ:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Эта формула даетъ выраженiе разстоянiя между двумя точками черезъ координаты этихъ точекъ.

Эта формула *общая*, т.-е. она справедлива для какихъ угодно двухъ точекъ плоскости.

Частный случай рѣшенной сейчасъ задачи представляетъ вычисленiе разстоянiя точки отъ *начала* координатъ.

Обозначивъ координаты данной точки M черезъ x и y и принявъ во вниманiе, что координаты начала O суть *нули*, по формулѣ (1) получимъ:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Упражненія. 1. *Найти разстояніе между слѣдующими парами точекъ:* a) (7, 10) и (4, 6); b) (— 3, 2) и (1, — 1); c) (— 2, — 7) и (3, — 6).

Отв. a) и b) 5; c) $\sqrt{26}$.

2. *Найти разстояніе точки* (— 5, 12) *отъ начала координатъ.*

Отв. 13.

3. *Найти центръ круга описаннаго около треугольника, вершинами котораго служатъ точки:* $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ и $C(3, -1)$.

Отв. (1, 1; — 0, 1).

4. *Показать, что треугольникъ, вершинами котораго служатъ точки* A (5, — 2), B (1, 2) и C (10, 3), *есть прямоугольный.*

§ 4. **Дѣленіе отрѣзка въ данномъ отношеніи.** *Данъ отрѣзокъ* M_1M_2 *координатами концовъ; требуется найти на немъ такую точку* M, *которая дѣлитъ этотъ отрѣзокъ на двѣ части въ отношеніи* $m:n$.

Пусть (черт. 4) концы отрѣзка суть M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2). Требуется на отрѣзкѣ M_1M_2 найти точку M (x, y) такъ, чтобы

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m}{n}.$$

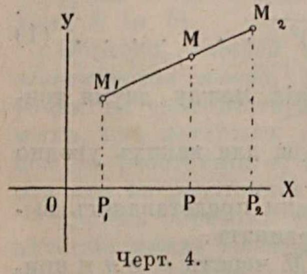
Проведя черезъ точки M_1, M и M_2 прямыя, параллельныя оси ординатъ, и называя черезъ P_1, P и P_2 точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ осью x, мы получаемъ по извѣстной теоремѣ геометріи слѣдующее равенство:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{P_1P}{PP_2}.$$

Но $P_1P = OP - OP_1 = x - x_1$; $PP_2 = OP_2 - OP = x_2 - x$.

Слѣд., $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$ и, по условію задачи,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}.$$



Черт. 4.

Рѣшая это уравненіе относительно x, находимъ:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}.$$

Подобнымъ же образомъ легко получить для ординаты y точки M слѣдующее выраженіе:

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}.$$

Если положить $m/n=\lambda$, то эти выраженія принимаютъ видъ:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ \ldots\ldots\ (3)$$

Эти формулы даютъ координаты искомой точки M. Буква λ обозначаетъ отношеніе отрѣзковъ и можетъ принимать всѣ *положительныя* значенія *).

Частный случай разсмотрѣнной задачи представляетъ задача о дѣленіи отрѣзка *пополамъ*. Для этого случая $\lambda=1$, и координаты x_0, y_0 средины отрѣзка M_1M_2 выражаются формулами:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2},\ \ldots\ldots\ (4)$$

т.-е. *каждая координата средины отрѣзка равна полусуммѣ соотвѣтственныхъ координатъ его концовъ.*

Упражненія. 1. *Найти середины сторонъ треугольника, вершинами котораго служатъ точки* $A\,(1,-1)$, $B\,(6,\ 4)$, $C\,(5,-2)$.

Отв. (3,5; 1,5); (5,5; 1); (3; — 1,5).

2. *Для того же треугольника найти точку пересѣченія медіанъ.*

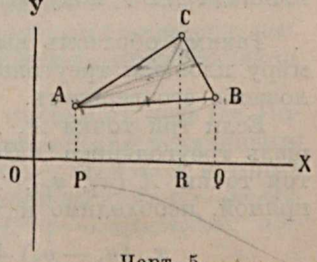
Отв. (4, 1/3).

3. *Показать, что въ треугольникѣ съ вершинами* $A\,(x_1,\ y_1)$, $B\,(x_2,\ y_2)$, $C\,(x_3,\ y_3)$ *координаты точки пересѣченія медіанъ (центръ тяжести треугольника) равны* $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

4. *Черезъ каждую вершину треугольника, даннаго въ упражненіи 1, проведена прямая, параллельная противоположной сторонѣ. Найти вершины полученнаго такимъ образомъ новаго треугольника.*

Отв. (0, — 7); (2, 5); (10, 3).

§ 5. Площадь треугольника. *Данъ треугольникъ координатами вершинъ:* $A\ (x_1,\ y_1)$, $B\ (x_2,\ y_2)$ *и* $C\ (x_3,\ y_3)$. *Требуется найти его площадь.*



Черт. 5.

Опустимъ перпендикуляры изъ вершинъ A, B, C треугольника на ось абсциссъ и основанія ихъ назовемъ соотвѣтственно буквами P, Q, R (черт. 5). Изъ чертежа легко видѣть, что пл. $ABC=$ пл. $PACR+$ пл. $RCBQ-$ пл. $PABQ$. Вычисляя площади трапецій, входящихъ во вторую часть этого равенства, находимъ:

*) Отрицательныя значенія λ соотвѣтствуютъ т. н. дѣленію отрѣзка *внѣшнимъ образомъ*, т.-е. опредѣленію на *продолженіи* даннаго отрѣзка такой точки M, чтобы $M_1M:MM_2=m:n$.

$$\text{пл. } PACR = \frac{(PA+CR).PR}{2} = \frac{(y_1+y_3)\ (x_3-x_1)}{2};$$

$$\text{пл. } RCBQ = \frac{(RC+BQ).RQ}{2} = \frac{(y_3+y_2)\ (x_2-x_3)}{2};$$

$$\text{пл. } PABQ = \frac{(PA+BQ).PQ}{2} = \frac{(y_1+y_2)\,(x_2-x_1)}{2} = -\frac{(y_2+y_1)(x_1-x_2)}{2}$$

Складывая двѣ первыя площади и вычитая третью, получимъ:

$$\text{пл.} ABC = {}^1/_2\,[(y_1+y_3)\,(x_3-x_1)+(y_3+y_2)\,(x_2-x_3)+(y_2+y_1)\,(x_1-x_2)],$$

$$\text{или пл. } ABC = {}^1/_2\ [x_1\ (y_2-y_3)+x_2\ (y_3-y_1)+x_3\ (y_1-y_2)] \ldots (5)$$

Вычисленіе площади треугольника по этой формулѣ можетъ дать число положительное и отрицательное.

Абсолютное значеніе его даетъ *мѣру* площади треугольника, а знакъ его указываетъ на *направленіе*, въ которомъ нужно двигаться по периметру треугольника, чтобы встрѣтить вершины его въ порядкѣ A, B, C. Если это направленіе *противоположно* движенію часовой стрѣлки, то разсматриваемая формула доставляетъ *положительное* значеніе для площади, если же оно совершается *по* стрѣлкѣ часовъ, то *отрицательное*. Напримѣръ, если $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_2 = 0$; $x_3 = 0$, $y_3 = 1$, направленіе ABC противоположно движенію часовой стрѣлки; въ этомъ случаѣ

$$\text{пл. } ABC = +\frac{1}{2}\cdot$$

Если же $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 = 1$; $x_3 = 1$, $y_3 = 0$, то направленіе ABC совпадаетъ съ движеніемъ часовой стрѣлки и для площади ABC получаемъ изъ нашей формулы число $-\frac{1}{2}\cdot$

Такимъ образомъ выведенная нами формула не только даетъ мѣру площади треугольника, но указываетъ относительное расположеніе его вершинъ.

Если три точки A, B и C лежатъ на одной прямой, то площадь треугольника ABC равна нулю. Обратно, для того, чтобы три точки $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$ и $C\ (x_3, y_3)$ лежали на одной прямой, необходимо и достаточно условія:

$$x_1\ (y_2-y_3)+x_2\ (y_3-y_1)+x_3\ (y_1-y_2)=0.$$

Упражненія. 1. *Найти площадь треугольника съ вершинами* $O\ (o, o)$, $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$. *Отв.* $\frac{1}{2}\,(x_1y_2 - x_2y_1)$.

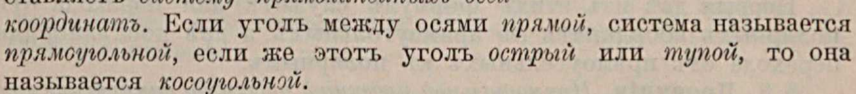
2. *Примѣнить результатъ упр.* 1 *къ выводу формулы* (5).
3. *Лежатъ ли точки* (1, 4), (-2, 7), ($+12$, -7) *на одной прямой?*
4. *Найти площадь четыреугольника съ вершинами* A (1, -2), B (5, 3), C(-1, 7) и D(-3, -1). *Отв.* 40.

§ 6. **Косоугольныя координаты точки на плоскости.** Для опредѣленія положенія точки на плоскости вмѣсто двухъ взаимно-перпендикулярныхъ осей можно взять двѣ оси, пересѣкающіяся подъ *какимъ-нибудь* угломъ. За координаты точки принимаются въ этомъ случаѣ числа, выражающія алгебраическую мѣру отрѣзковъ, проведенныхъ черезъ данную точку параллельно осямъ.

Такъ, напр., абсцисса и ордината точки M_1 (черт. 6) суть числа, измѣряющія соотвѣтственно отрѣзки QM_1 и PM_1, абсцисса и ордината точки M_4 суть числа, выражающія мѣру соотвѣтственно отрѣзковъ Q_1M_4 и PM_4.

Черт. 6.

Пара пересѣкающихся прямыхъ составляетъ *систему прямолинейныхъ осей координатъ.* Если уголъ между осями *прямой*, система называется *прямоугольной*, если же этотъ уголъ *острый* или *тупой*, то она называется *косоугольной.*



Прямолинейныя координаты называются также *декартовыми* по имени творца аналитической геометріи *Декарта* (*René Descartes*, 1596—1650); основныя идеи аналитической геометріи изложены имъ въ книгѣ: «*Géométrie*», появившейся въ 1637 г. *).

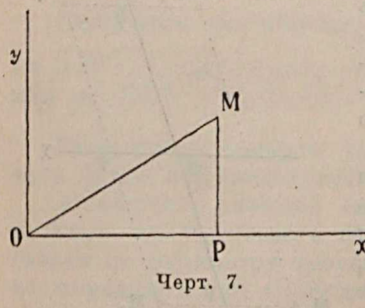
Въ настоящемъ курсѣ употребляются почти исключительно *прямоугольныя* координаты.

§ 7. **Полярныя координаты.** Для опредѣленія положенія точки на плоскости можно пользоваться и не декартовыми координатами. Простѣйшую систему не декартовыхъ координатъ представляютъ *полярныя координаты.*

Изъ произвольной точки O плоскости проведемъ *лучъ* Ox. Положеніе каждой точки плоскости опредѣляется *двумя* величинами: *разстояніемъ ея* $OM=r$ отъ точки O и *угломъ* $\angle xOM=\varphi$, который образуетъ r съ Ox. Точка O называется *полюсомъ*, лучъ Ox—*полярной осью*, r—*радіусомъ-векторомъ* точки M, φ—*амплитудою, ази-*

*) Историческія свѣдѣнія объ аналитической геометріи можно найти въ книгахъ: *Лоренцъ. Элементы высшей математики.* Пер. *В. П. Шереметевскаго; Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik; Boyer. Histoire des Mathématiques.*

мутомъ, полярнымъ угломъ или *аргументомъ* точки M. r и φ суть *полярныя координаты* точки M. Радiусъ r считается величиной *существенно положительной*, а уголъ φ можетъ отсчитываться въ двухъ противоположныхъ направленiяхъ, при чемъ направленiе, *противоположное* движенiю часовой стрѣлки, принимается обыкновенно за *положительное*, а *совпадающее* съ движенiемъ часовой стрѣлки — за *отрицательное* (ср. § 5). Для каждой точки плоскости уголъ φ имѣетъ безчисленное множество значенiй, отличающихся другъ отъ друга числомъ, кратнымъ 360^0 или 2π.



Черт. 7.

Обыкновенно принимаютъ φ заключеннымъ между 0 и 360^0 (0 и 2π) или между -180^0 и $+180^0$ ($-\pi$, $+\pi$).

Если система *прямоугольныхъ* координатъ имѣетъ начало въ *полюсѣ* и ось x, направленную по *полярной оси*, то зависимость между *прямоугольными* и *полярными* координатами выражается слѣдующими простыми уравненiями (черт. 7):

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;\ r = +\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \operatorname{arctan}\frac{y}{x} \quad . \ . \ . \ . \quad (6)$$

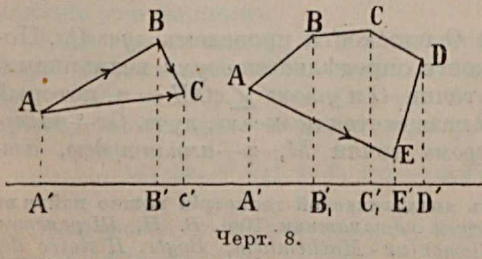
Первыя двѣ изъ этихъ формулъ служатъ для перехода отъ полярныхъ координатъ къ прямоугольнымъ, а двѣ послѣднiя для перехода отъ прямоугольныхъ къ полярнымъ.

§ 8. **Проекцiи.** *Прямоугольной проекцiей точки на данную прямую (ось проекцiй) называется основанiе перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на ось.*

Проекцiей отрѣзка на данную ось называется отрѣзокъ, началомъ и концомъ котораго служатъ соотвѣтственно проекцiи начала и конца даннаго отрѣзка на ось проекцiй.

Проекцiей ломаной линiи называется сумма проекцiй ея звеньевъ.

Наприм., проекцiя ломаной ABC равна проек. $AB +$ пр. BC; пр. $ABCDE =$ пр. $AB +$ пр. $BC +$ пр. $CD +$ пр. DE (черт. 8).



Черт. 8.

Изъ послѣдняго опредѣленiя слѣдуетъ, что *проекцiя не замкнутой ломаной линiи равна проекцiи ея замыкающей, т.-е. того отрѣзка, который имѣетъ начало въ началѣ ломаной линiи, а конецъ — въ концѣ ея.*

Напр., пр. $ABC =$ пр. AC; пр. $ABCDE =$ пр. AE.

То же самое предложеніе можно выразить слѣдующимъ образомъ: *проекція замкнутой ломаной линіи равна нулю.* Дѣйствительно,

$$\text{пр. } ABCDE = \text{пр. } AB + \text{пр. } BC + \text{пр. } CD + \text{пр. } DE = \text{пр. } AE,$$

$$\text{но пр. } EA = -\text{пр. } AE; \text{ поэтому}$$

$$\text{пр. } ABCDEA = \text{пр. } AB + \text{пр. } BC + \text{пр. } CD + \text{пр. } DE + \text{пр. } EA = $$
$$= \text{пр. } AE + \text{пр. } EA = 0.$$

Между мѣрами проектируемаго отрѣзка и его проекціи существуетъ весьма простое соотношеніе.

Пусть MN (черт. 9) есть ось проекцій и направленіе MN— ея положительное направленіе. Обозначимъ черезъ φ уголъ между положительнымъ направленіемъ оси проекцій и направленіемъ даннаго отрѣзка AB. Проектируя его на ось и проведя черезъ A прямую, параллельную оси, до встрѣчи въ точкѣ C съ перпендикуляромъ изъ B на ось, получимъ прямоугольный треугольникъ ABC, изъ котораго находимъ:

$$AC = AB.\cos \widehat{BAC};$$

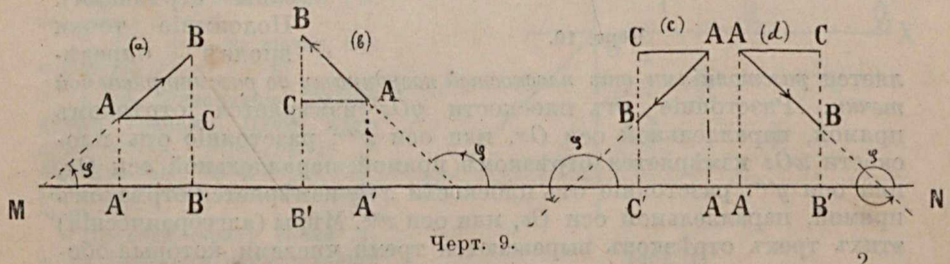
но $AC = A_1B_1 = \text{пр. } AB$; уголъ же BAC равняется либо φ, либо $\pi-\varphi$, либо $\varphi-\pi$, либо $2\pi-\varphi$ [на черт. 9 случаи (a), (b), (c), (d)]. Въ первомъ и послѣднемъ случаяхъ проекція A_1B_1 отрѣзка AB *положительна,* а во второмъ и третьемъ *отрицательна* (см. черт. 9). Поэтому имѣемъ:

для перваго случая: $\text{пр. } AB = +AB \cos \widehat{BAC} = AB \cos\varphi;$
для второго случая: $\text{пр. } AB = -AB \cos (\pi-\varphi) = AB \cos\varphi;$
для третьяго случая: $\text{пр. } AB = -AB \cos (\varphi-\pi) = AB \cos\varphi;$
для четвертаго случая: $\text{пр. } AB = +AB \cos (2\pi-\varphi) = AB \cos\varphi.$

Такимъ образомъ мы получаемъ общую формулу:

$$\text{пр. } AB = AB \cos\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

указывающую связь между мѣрами (алгебраическими) отрѣзка и его проекціи.



Черт. 9.

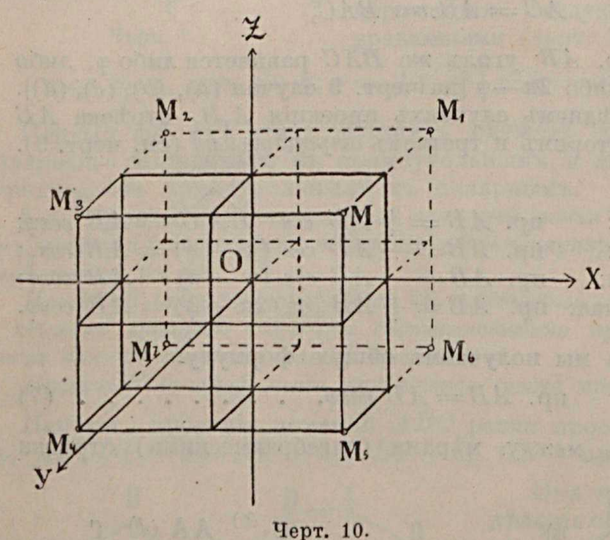
Первыя двѣ изъ формулъ (6) показываютъ, что прямоугольныя координаты точки суть не что иное, какъ *проекціи на оси координатъ разстоянія точки отъ начала*.

Изъ формулы (7) слѣдуетъ, что проекція отрѣзка, нанесеннаго на какую-нибудь ось, равна произведенію алгебраической мѣры отрѣзка на косинусъ угла между *положительными* направленіями оси отрѣзковъ и оси проекцій.

Пусть, напр., ось отрѣзковъ есть AB, а ось проекцій MN [черт. 9 (a)]; уголъ между положительными направленіями осей $\angle NMB = \varphi$. Проектируя отрѣзки AB и BA, получимъ:

$$\text{пр. } AB = A'B' = AB.\cos\varphi;$$
$$\text{пр. } BA = B'A' = -AB.\cos\varphi = BA.\cos\varphi.$$

§ 9. **Координаты точки въ пространствѣ.** Возьмемъ *три* взаимно перпендикулярныя плоскости Oxy, Oxz и Oyz (черт. 10), пересѣкающіяся въ точкѣ O. Эти плоскости называются *плоскостями координатъ*, точка O—*началомъ координатъ*, а прямыя Ox, Oy и Oz пересѣченія каждой пары плоскостей координатъ—*осями координатъ*. На каждой изъ осей координатъ укажемъ тѣ направленія, которыя считаются *положительными;* пусть эти направленія будутъ Ox, Oy, Oz (на чертежѣ указаны стрѣлками). Положеніе точки вполнѣ опредѣляется *разстояніями отъ плоскостей координатъ до разсматриваемой точки*. Разстояніе отъ плоскости yOz измѣряется отрѣзкомъ прямой, параллельной оси Ox, или оси $x^{\text{овъ}}$; разстояніе отъ плоскости xOz измѣряется отрѣзкомъ прямой, параллельной оси Oy, или оси $y^{\text{овъ}}$; разстояніе отъ плоскости xOy измѣряется отрѣзкомъ прямой, параллельной оси Oz, или оси $z^{\text{овъ}}$. Мѣры (алгебраическія) этихъ трехъ отрѣзковъ выражаются тремя числами, которыя обо-



Черт. 10.

значаются соотвѣтственно черезъ x, y, z и называются *координатами точки*. Каждой точкѣ соотвѣтствуетъ единственная *тройка* чиселъ, называемыхъ ея координатами, и обратно, каждой *тройкѣ* чиселъ соотвѣтствуетъ *единственная* точка пространства.

Такимъ образомъ между *точками пространства* съ одной стороны и *тройками чиселъ* съ другой устанавливается *взаимное и однозначное соотвѣтствіе*.

Пусть a, b и c суть три *положительныхъ* числа. Въ каждомъ изъ 8 трехгранныхъ угловъ, образуемыхъ плоскостями координатъ, есть точка, разстоянія которой отъ плоскостей yOz, zOx и xOy суть соотвѣтственно a, b и c.

Координаты этихъ 8 точекъ приведены въ слѣдующей таблицѣ (см. черт. 10).

Коорд. точки	M:	$x = a$,	$y = b$,	$z = c$;
» »	M_1:	$x = a$,	$y = -b$,	$z = c$;
» »	M_2:	$x = -a$,	$y = -b$,	$z = c$;
» »	M_3:	$x = -a$,	$y = b$,	$z = c$;
» »	M_4:	$x = -a$,	$y = b$,	$z = -c$;
» »	M_5:	$x = a$,	$y = b$,	$z = -c$;
» »	M_6:	$x = a$,	$y = -b$,	$z = -c$;
» »	M_7:	$x = -a$,	$y = -b$,	$z = -c$.

Точка M съ координатами a, b, c обозначается знакомъ: $M\,(a,\ b,\ c)$.

Упражненія. 1. *Построить точки:* (1, 2, 3); (— 2, 1, 1); (— 2, — 1, 1); (— 3, — 1, — 1).

2. *Гдѣ лежатъ точки, для которыхъ* a) $x = o$; b) $y = o$; c) $z = o$?

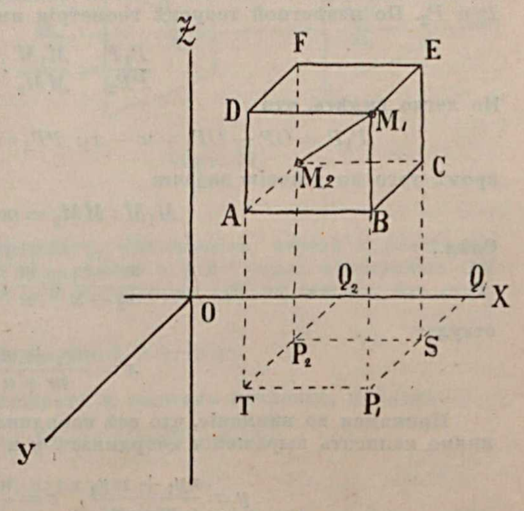
3. *Гдѣ лежатъ точки, для которыхъ* a) $x = o$, $y = o$; b) $y = o$, $z = o$; c) $z = o$, $x = o$? *Построить точку* (o, o, o).

4. *Гдѣ лежатъ точки, для которыхъ* $x = a$?

5. *Гдѣ лежатъ точки, для которыхъ* $x = a$, $y = b$?

§ 10. **Разстояніе между двумя точками.** Пусть даны двѣ точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Требуется найти разстояніе между ними (черт. 11).

Проведя черезъ точки M_1 и M_2 плоскости, параллельныя



Черт. 11.

плоскостямъ координатъ, получимъ прямоугольный параллелепипедъ $ABCM_2DM_1EF$, діагональ котораго есть искомое разстояніе M_1M_2.

По извѣстному соотношенію между діагональю прямоугольнаго параллелепипеда и его тремя измѣреніями имѣемъ:

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{M_2A}^2 + \overline{BM_1}^2.$$

Но легко видѣть, что

$$AB = TP_1 = Q_2Q_1 = OQ_1 - OQ_2 = x_1 - x_2;$$
$$M_2A = P_2T = Q_2T - Q_2P_2 = Q_1P_1 - Q_2P_2 = y_1 - y_2;$$
$$BM_1 = P_1M_1 - P_1B = P_1M_1 - P_2M_2 = z_1 - z_2.$$

Поэтому

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$
$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (8$$

Эта формула даетъ выраженіе разстоянія между двумя точками черезъ ихъ координаты.

Разстояніе OM точки $M(x, y, z)$ отъ начала координатъ дается формулой:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

которая представляетъ частный случай формулы (8) (ср. § 3).

§ 11. Дѣленіе отрѣзка въ данномъ отношеніи. *Данъ отрѣзокъ* M_1M_2 *своими концами:* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$. *Требуется найти на немъ точку* $M(x, y, z)$, *въ которой онъ дѣлился бы въ данномъ отношеніи* $m:n$, *т.-е. такъ, чтобы*

$$M_1M : MM_2 = m : n.$$

Чтобы получить координату x точки M, проведемъ черезъ точки M_1, M и M_2 плоскости, параллельныя плоскости yOz *(сдѣлать чертежъ)*. Точки ихъ пересѣченія съ осью x назовемъ соотвѣтственно буквами P_1, P и P_2. По извѣстной теоремѣ геометріи имѣемъ:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

Но легко видѣть, что

$$P_1P = OP - OP_1 = x - x_1;\ PP_2 = OP_2 - OP = x_2 - x;$$

кромѣ того по условію задачи:

$$M_1M : MM_2 = m : n.$$

Слѣд.,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n},$$

откуда:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}.$$

Принимая во вниманіе, что всѣ координаты вполнѣ равноправны, можно прямо написать выраженія координатъ y и z:

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}, \quad z = \frac{nz_1 + mz_2}{m + n}.$$

Частный случай этихъ формулъ представляютъ выраженія координатъ x_0, y_0 и z_0 средины отрѣзка M_1M_2:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \; z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

§ 12. Проекціи въ пространствѣ. *Проекціей (прямоугольной) точки въ пространствѣ на нѣкоторую прямую (ось проекцій) называется точка пересѣченія оси плоскостью, проведенной черезъ эту точку перпендикулярно оси.*

Проекціей отрѣзка на данную ось называется отрѣзокъ оси, котораго начало и конецъ находятся соотвѣтственно въ проекціяхъ начала и конца даннаго отрѣзка.

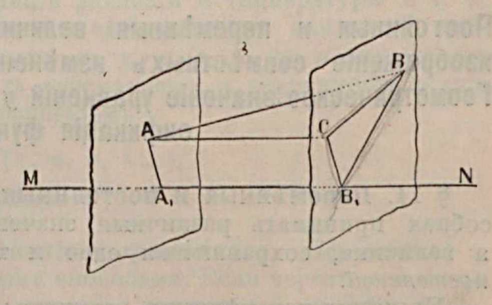
Между мѣрами отрѣзка и его проекціи существуетъ связь, указываемая формулой (7) § 8. Дѣйствительно, пусть AB есть данный отрѣзокъ и MN ось проекцій (черт. 12). Въ общемъ случаѣ AB и MN не лежатъ въ одной плоскости. Проведя черезъ A плоскость P_1 и черезъ B плоскость P_2, перпендикулярныя къ оси MN, мы получимъ въ пересѣченіяхъ A_1 и B_1 этихъ плоскостей съ осью проекцій проекціи точекъ A и B, а отрѣзокъ A_1B_1 явится проекціей даннаго отрѣзка AB. Проведемъ затѣмъ прямую AC параллельно MN и пусть точка C будетъ точкою пересѣченія AC съ плоскостью P_2. Соединивъ C съ B, получимъ треугольникъ ABC, въ которомъ уголъ C прямой ($MN \perp$ пл. P_2; $AC \parallel MN$; слѣд., $AC \perp$ пл. P_2 или $AC \perp CB$). Изъ этого треугольника имѣемъ:

$$AC = A_1B_1 = AB\cos\widehat{CAB}.$$

Но уголъ $\widehat{CAB}$ есть уголъ между отрѣзкомъ AB и осью проекцій. Обозначивъ его черезъ φ, получимъ:

$$\text{пр. } AB = AB.\ \cos\varphi.$$

Не трудно убѣдиться, что *прямоугольныя координаты* точки въ пространствѣ суть не что иное, какъ *проекціи ея разстоянія отъ начала на оси координатъ.*



Черт. 12.

§ 13. Соотношеніе между углами прямой съ тремя прямоугольными осями координатъ. Обозначивъ черезъ r разстояніе OM точки $M(x, y, z)$ отъ начала O и черезъ α, β и γ углы, образуемые OM соотвѣтственно съ осями x, y и z, и проектируя OM на каждую изъ осей, получимъ соотношенія:

$$x = r\cos\alpha, \; y = r\cos\beta, \; z = r\cos\gamma.$$

Возведя эти равенства въ квадратъ и сложивъ почленно, найдемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma);$$

но по форм. (9) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; слѣд.:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (10)$$

Это равенство показываетъ, что изъ трехъ угловъ, которые образуетъ прямая, проходящая черезъ начало координатъ, съ тремя взаимно перпендикулярными осями, произвольны только *два*, третій же опредѣляется формулой (10).

Прямая, не проходящая черезъ начало координатъ, составляетъ съ осями тѣ же углы, которые составляетъ съ ними прямая, ей параллельная и проходящая черезъ начало.

Поэтому углы α, β и γ какой угодно прямой съ тремя прямоугольными осями координатъ связаны соотношеніемъ (10).

Упражненія. 1. *Найти разстояніе точки $M(1, 1, 1)$ отъ начала O и углы OM съ осями координатъ.*

Отв. $OM = \sqrt{3}$; $\cos\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \ldots$

2. *Прямая составляетъ съ осями x и y углы въ 45^0; какой уголъ составляетъ она съ осью z?*

3. *Можно ли провести прямую такъ, чтобы она составляла съ осями x и y углы въ 60^0, а съ осью z уголъ въ 45^0?*

ГЛАВА II.

Постоянныя и перемѣнныя величины. Функціи. Графическое изображеніе совмѣстныхъ измѣненій перемѣнной и функціи. Геометрическое значеніе уравненій $y = f(x)$ и $z = f(x, y)$. Классификація функцій.

§ 14. **Перемѣнныя и постоянныя величины.** Величина, способная принимать различныя значенія, называется *перемѣнной*, а величина, сохраняющая одно и то же значеніе, называется *постоянной*.

Примѣры перемѣнныхъ величинъ: углы въ треугольникѣ, площадь круга, давленіе воздуха, скорость падающаго тѣла, народонаселеніе даннаго города, цѣна единицы даннаго товара и т. п.

Примѣры постоянныхъ величинъ: сумма угловъ треугольника ($= 2d$ или 180^0), отношеніе окружности къ діаметру (π), ускореніе при свободномъ паденіи для данной широты.

§ 15. **Функціи.** *Изъ двухъ перемѣнныхъ величинъ, измѣняющихся въ зависимости одна отъ другой, одна называется* **независимой** *перемѣнной, а другая ея* **функціей** *или* **зависимой** *перемѣнной.*

Обозначая независимую перемѣнную и ея функцію соотвѣтственно черезъ x и y, функціональную зависимость между ними выражаютъ уравненіемъ:

$y = f(x)$ (читать: y равно f отъ x)

въ которомъ буква f (начальная буква слова „*fonction*") указываетъ на существованіе *нѣкоторой* зависимости между перемѣнными x и y. Вмѣсто буквы f для той же цѣли употребляются и другія буквы.

Функція $y=f(x)$ называется функціей *одного независимаго перемѣннаго.*

Примѣры функцій одного независимаго перемѣннаго: площадь круга (πx^2) есть функція его радіуса (x); объемъ куба (x^3) есть функція его ребра (x); пространство, пройденное тѣломъ при равномѣрномъ движеніи, есть функція времени движенія ($s=at$, гдѣ s есть пространство, a — постоянная скорость, t—время движенія) и т. д.

Если измѣненіе перемѣннаго u зависитъ отъ измѣненій *двухъ* независимыхъ перемѣнныхъ x и y, то u называется *функціей двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.* Символическое изображеніе функціональной зависимости дается въ этомъ случаѣ уравненіемъ:

$$u=f(x,y) \qquad \text{(читать: } u \text{ равно } f \text{ отъ } x \text{ и } y).$$

Напр., площадь прямоугольника есть функція *двухъ* его измѣреній, объемъ газа есть функція давленія и температуры и т. п.

Если измѣненіе перемѣннаго u зависитъ отъ измѣненій *многихъ* независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, t,..., то u называется *функціей многихъ независимыхъ перемѣнныхъ,* а зависимость u отъ x, y, z, t,... изображается уравненіемъ:

$$u=f(x,\ y,\ z,\ t,\ldots),$$

аналогичнымъ указаннымъ выше.

§ 16. Непрерывное измѣненіе перемѣннаго. Перемѣнное x можетъ измѣняться различными способами. Если черезъ a и b мы обозначимъ соотвѣтственно *начальное* и *конечное* значеніе перемѣннаго x, то переходъ x отъ a къ b можетъ совершиться либо такъ, что x принимаетъ только *нѣкоторыя* значенія, содержащіяся между a и b, либо такъ, что оно принимаетъ послѣдовательно *всѣ* значенія отъ a до b. Первый родъ измѣненія называется *прерывнымъ*, второй — *непрерывнымъ.*

Если (черт. 1) AB есть отрѣзокъ, концы котораго A и B имѣютъ соотвѣтственно абсциссы a и b, то прерывное измѣненіе характеризуется тѣмъ, что принимаемыя перемѣннымъ x значенія опредѣляютъ лишь нѣкоторыя точки отрѣзка AB, при непрерывномъ же измѣненіи перемѣннаго точка, имѣющая абсциссу x, описываетъ *весь* отрѣзокъ AB. Аналитически непрерывное измѣненіе перемѣннаго x характеризуется тѣмъ, что разность между значеніями x' и x'' перемѣннаго x, лежащими между a и b,

можетъ быть сдѣлана по абсолютному значенію меньше произвольнаго положительнаго числа ε:

$$|x' - x''| < \varepsilon \text{ *)}.$$

Измѣненіе перемѣннаго x отъ $x = a$ до $x = b$ называется измѣненіемъ въ *интервалѣ* отъ a до b; интервалъ отъ a до b обозначается символомъ (a, b); числа a и b называются соотвѣтственно *нижней* и *верхней* границами интервала.

Интервалъ, содержащій *всѣ положительныя* числа, имѣетъ *нуль нижней* границей и *не имѣетъ верхней* границы, такъ какъ, взявъ произвольно большое число, мы можемъ образовать число, большее взятаго (напр., черезъ прибавленіе къ взятому *единицы*); это безграничное возрастаніе положительныхъ чиселъ выражаютъ словами: *„возрастаетъ до безконечности“*; интервалъ, содержащій всѣ положительныя числа, обозначаютъ символомъ $(0, \infty)$, гдѣ ∞ есть знакъ безконечности.

Интервалъ, содержащій *всѣ отрицательныя* числа, обозначается символомъ $(-\infty, 0)$, и интервалъ, содержащій *всѣ вещественныя (дѣйствительныя)* числа, — символомъ $(-\infty, \infty)$.

§ 17. **Непрерывное измѣненіе функціи.** При *непрерывномъ* измѣненіи перемѣннаго его функція можетъ измѣняться *прерывно и непрерывно.*

Пусть (a, b) есть интервалъ измѣненія перемѣннаго x, а x' и x'' суть два его значенія, лежащія въ этомъ интервалѣ.

Характеристикой *непрерывности* функціи $f(x)$ *при* $x = x'$ служитъ возможность сдѣлать абсолютное значеніе разности двухъ ея значеній $f(x')$ и $f(x'')$ меньше произвольнаго, заранѣе даннаго, положительнаго числа δ посредствомъ надлежащаго приближенія x'' къ x'; иначе это можно формулировать такъ: *если для произвольнаго положительнаго числа δ можно найти такое положительное число ε, что*

$$|f(x') - f(x'')| < \delta \text{ при } |x' - x''| < \varepsilon,$$

то функція $f(x)$ непрерывна при $x = x'$.

Если сказанное справедливо для всѣхъ значеній x, лежащихъ въ интервалѣ (a, b), то функція называется *непрерывной въ этомъ интервалѣ.*

Примѣры. 1. *Показать, что функція $f(x) = 2x - 1$ непрерывна при $x = 1$.*

---

*) Абсолютное значеніе числа a обозначается символомъ $|a|$. Напримѣръ, $|+2| = 2$, $|-2| = 2$.

Значенія данной функціи при $x=1$ и при $x=1+h$ *) суть

$$f(1)=1 \text{ и } f(1+h)=1+2h;$$

абсолютное значеніе разности между ними есть

$$|f(1)-f(1+h)|=2|h|.$$

Для того, чтобы $|2h|$ было меньше произвольнаго положительнаго числа δ, достаточно взять $|h|<\frac{1}{2}\delta$.

Очевидно, что полученный нами результатъ остается справедливымъ при *всѣхъ* значеніяхъ x. Поэтому *разсматриваемая функція непрерывна при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго.*

2. *Показать, что функція* $f(x)={}^1/_4x^2$ *непрерывна при* $x=2$.

Такъ какъ $f(2)=1$ и $f(2+h)={}^1/_4(2+h)^2=1+h+{}^1/_4h^2$, то
$$|f(2)-f(2+h)|=|h+{}^1/_4h^2|.$$

Нужно показать, что при достаточно маломъ (по абсолютному значенію) h эта разность можетъ быть сдѣлана по абсолютному значенію меньше произвольнаго числа δ.

Замѣчая, что $|h+{}^1/_4h^2|\leqslant|h|+|{}^1/_4h^2|$ и что абсолютное значеніе h можно считать меньшимъ единицы, такъ что $|h^2|<|h|$, находимъ:

$$|h+{}^1/_4h^2|<|h|+{}^1/_4|h|, \text{ или } |h+{}^1/_4h^2|<{}^5/_4|h|.$$

Для того, чтобы удовлетворилось неравенство

$$|h+{}^1/_4h^2|<\delta,$$

достаточно взять h такъ, чтобы

$${}^5/_4|h|<\delta \text{ или } |h|<{}^4/_5\delta.$$

Итакъ, разсматриваемая функція непрерывна при $x=2$. Легко видѣть, что то же заключеніе мы получимъ при изслѣдованіи всякаго значенія x. Слѣд., *функція* ${}^1/_4x^2$ *непрерывна при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго.*

3. *Показать, что функція* $f(x)=1/x$ *непрерывна при* $x=1$.

Въ этомъ случаѣ

$$f(1)=1,\ f(1+h)=\frac{1}{1+h},\ f(1)-f(1+h)=1-\frac{1}{1+h}=\frac{h}{1+h},$$
$$|f(1)-f(1+h)|=\left|\frac{h}{1+h}\right|=\frac{|h|}{|1+h|}.$$

*) Вмѣсто x'' взято $1+h$.

Принимая $|h|<1$ и замѣчая, что

$$|1+h|\geqslant 1-|h| \text{ и } \frac{|h|}{|1+h|}\leqslant\frac{|h|}{1-|h|},$$

находимъ

$$|f(1)-f(1+h)|\leqslant\frac{|h|}{1-|h|}.$$

Для того, чтобы удовлетворилось неравенство

$$|f(1)-f(1+h)|<\delta,$$

достаточно выбрать h такъ, чтобы имѣло мѣсто неравенство

$$\frac{|h|}{1-|h|}<\delta,$$

изъ котораго находимъ:

$$|h|<\frac{\delta}{1+\delta}.$$

Указанное разсужденіе можно примѣнить при всѣхъ значеніяхъ x, кромѣ $x=0$. Слѣд., *функція непрерывна при всѣхъ значеніяхъ x, кромѣ $x=0$.*

Что же касается до значенія данной функціи при $x=0$, то нужно замѣтить, что ея значенія получаются дѣленіемъ единицы на значенія перемѣннаго. Такъ какъ дѣленіе на нуль невозможно, то функція не имѣетъ значенія при $x=0$. Зная это, измѣнимъ постановку вопроса, а именно, изслѣдуемъ характеръ *измѣненія* значеній функціи при *приближеніи* перемѣннаго x къ нулю.

При неограниченномъ приближеніи x къ нулю абсолютное значеніе его безгранично убываетъ. Когда x принимаетъ послѣдовательно значенія 0,1; 0,01; 0,001; ..., функція y получаетъ значенія 10, 100, 1000, ... Когда x принимаетъ послѣдовательно значенія —0,1; —0,01; —0,001; ..., функція y получаетъ значенія —10, —100, —1000, ... Въ томъ и другомъ случаѣ абсолютное значеніе функціи *возрастаетъ*. Кромѣ того легко видѣть, что это возрастаніе неограниченно, т.-е. въ процессѣ приближенія x къ нулю можно указать такое значеніе $|x|$, начиная съ котораго значенія $|y|$ будутъ больше произвольнаго положительнаго числа.

Такой способъ измѣненія функціи кратко характеризуется словами: *„функція стремится къ безконечности“*, или *„при* $x=0$

функція получаетъ безконечно большое значеніе", или „*при* $x=0$ *функція равна безконечности*".

При непрерывномъ измѣненіи x отъ $-\infty$ до 0 функція *отрицательна* и безгранично возрастаетъ по абсолютному значенію, т.-е. стремится къ $-\infty$, а при измѣненіи x отъ $+\infty$ до 0 функція *положительна* и безгранично возрастаетъ, т.-е. стремится къ $+\infty$. Поэтому значеніе функціи при $x=0$ будетъ $-\infty$ или $+\infty$, въ зависимости отъ того, совершается ли приближеніе x къ *нулю* черезъ *возрастаніе отрицательныхъ* значеній, или черезъ *убываніе положительныхъ*. При непрерывномъ измѣненіи перемѣннаго отъ $-\infty$ до $+\infty$ переходъ его черезъ нуль (т.-е. черезъ значеніе $x=0$) сопровождается *перемѣной знака* функціи, которая *скачкомъ* переходитъ отъ $-\infty$ къ $+\infty$. Такимъ образомъ нарушается ея *непрерывность*; значеніе $x=0$ называется мѣстомъ *разрыва функціи*.

§ 18. Геометрическое изображеніе совмѣстныхъ измѣненій перемѣннаго и функціи. Давая перемѣнному x различныя значенія и вычисляя соотвѣтственныя значенія функціи $y=f(x)$, мы получаемъ *пары* чиселъ. Если принять x и y за прямоугольныя координаты точки на плоскости, то каждой полученной указаннымъ образомъ парѣ чиселъ будетъ соотвѣтствовать точка на плоскости (§ 2). Ея *абсцисса* есть взятое нами значеніе перемѣннаго, а *ордината* — соотвѣтственное значеніе разсматриваемой функціи.

Вычислимъ, напр., значенія приведенныхъ въ предыдущемъ § функцій для $x=1,\ 1^1/_2,\ 2,\ 2^1/_2,\ 3$ и результаты расположимъ въ слѣдующихъ таблицахъ:

a) $y=2x-1$

Значенія x	Значенія y
1	1
$1^1/_2$	2
2	3
$2^1/_2$	4
3	5

b) $y=\frac{1}{4}x^2$

Значенія x	Значенія y
1	$^1/_4$
$1^1/_2$	$^9/_{16}$
2	1
$2^1/_2$	$1^9/_{16}$
3	$2^1/_4$

c) $y=1/x$

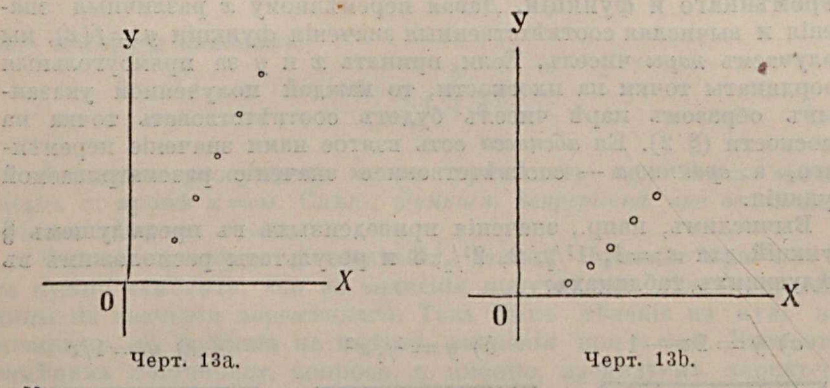
Значенія x	Значенія y
1	1
$1^1/_2$	$^2/_3$
2	$^1/_2$
$2^1/_2$	$^2/_5$
3	$^1/_3$

Изученіе приведенныхъ таблицъ позволяетъ сдѣлать нѣкоторыя заключенія о характерѣ измѣненія разсматриваемыхъ

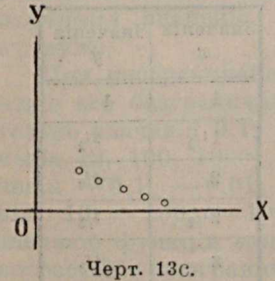
функцій при возрастаніи перемѣннаго на $^1/_2$, начиная отъ $x=1$ и кончая $x=3$, т.-е. при *прерывномъ* измѣненіи x въ интервалѣ (1,3).

Таблица a) показываетъ, что функція $y=2x-1$ *возрастаетъ* вмѣстѣ съ x, при чемъ *одинаковымъ приращеніямъ* перемѣннаго (равнымъ въ разсматриваемомъ случаѣ $^1/_2$) соотвѣтствуютъ *одинаковыя приращенія* функціи (равныя 1); таблица b) показываетъ, что функція $y=\frac{1}{4}x^2$ также возрастаетъ вмѣстѣ съ x, но *равнымъ* приращеніямъ x соотвѣтствуютъ *неравныя* приращенія функціи; таблица c) показываетъ, что функція $1/x$ *убываетъ* съ возрастаніемъ x и что *равнымъ* приращеніямъ x соотвѣтствуютъ *неравныя отрицательныя* приращенія функціи.

Построеніе точекъ, опредѣляемыхъ каждой парой значеній x и y, даетъ намъ для каждой функціи 5 точекъ, взаимнымъ расположеніемъ которыхъ иллюстрируются предыдущія заключенія (черт. 13 a, b, c).



Черт. 13a. Черт. 13b.



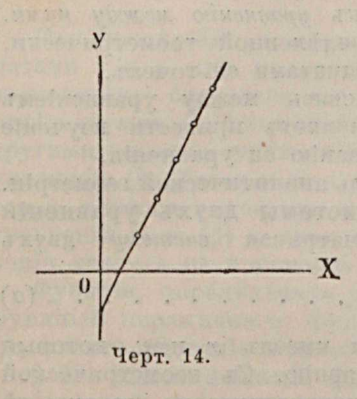
Черт. 13c.

Уменьшая скачекъ при переходѣ отъ одного значенія x къ слѣдующему, дѣлая его, напр., равнымъ 1/4, 1/5, 0,1 и т. д., мы удлиняемъ таблицы и увеличиваемъ число отдѣльныхъ точекъ на плоскости, при чемъ одноименныя координаты каждыхъ двухъ сосѣднихъ точекъ все менѣе и менѣе отличаются другъ отъ друга, а самыя точки располагаются все болѣе и болѣе тѣснымъ рядомъ. Это вызываетъ представленіе о *линіи*, какъ геометрическомъ образѣ, способномъ дать иллюстрацію совмѣстныхъ измѣненій перемѣннаго x и его функціи y. Указанныя выше отдѣльныя точки лежатъ на линіи,

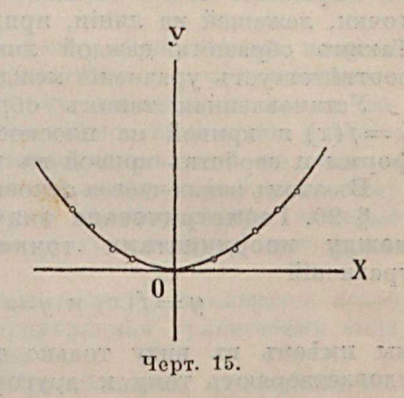
каждая точка которой своей абсциссой даетъ значеніе перемѣннаго x, а своей ординатой соотвѣтственное значеніе функціи y.

Эта линія называется *графикомъ* функціи. Измѣненіе ординатъ графика даетъ наглядное представленіе объ измѣненіи функціи.

Графикъ функціи $y=2x-1$ представляетъ *прямую* (черт. 14), графикъ функціи $y=\frac{1}{4}x^2$ есть кривая, называемая *параболой* (черт. 15), и графикъ функціи $y=1/x$ есть кривая, называемая *гиперболой* и состоящая изъ *двухъ вѣтвей* (черт. 16).



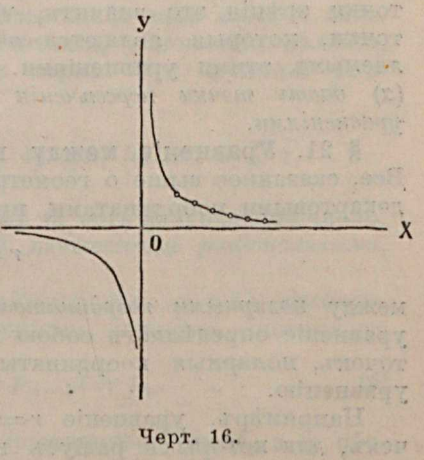
Черт. 14.



Черт. 15.

§ 19. Геометрическое значеніе уравненія $y=f(x)$. Тотъ способъ изслѣдованія измѣненій функціи, который въ предыдущемъ § былъ примѣненъ къ функціямъ $y=2x-1$, $y=x^2/4$, $y=1/x$, можно вообще примѣнять къ изслѣдованію измѣненій функцій, опредѣляемыхъ уравненіями вида:

$$y=f(x)\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$



Черт. 16.

гдѣ f обозначаетъ непрерывную въ изслѣдуемомъ интервалѣ функцію. Для функціи y, опредѣляемой уравненіемъ (α), можно составить таблицу совмѣстныхъ измѣненій перемѣннаго и функціи, можно иллюстрировать эту таблицу построеніемъ точекъ, имѣющихъ координатами соотвѣтственныя значенія x и y, можно, наконецъ, построить *графикъ* функціи, т.-е. кривую, обладающую тѣмъ

свойствомъ, что координаты каждой ея точки удовлетворяютъ уравненію (α). Изъ этого слѣдуетъ, что уравненію (α) соотвѣтствуетъ нѣкоторая *кривая* на плоскости, если x и y принять за координаты точки.

Уравненіе (α) называется *уравненіемъ кривой*, а перемѣнныя координаты x и y въ уравненіи (α) называются *текущими координатами*.

Обратно, если линія на плоскости дана *построеніемъ* или какъ *геометрическое мѣсто точекъ, обладающихъ извѣстнымъ свойствомъ*, то выраженіе этого свойства черезъ координаты произвольной точки, лежащей на линіи, приводитъ къ *уравненію между ними*. Такимъ образомъ каждой линіи, опредѣленной геометрически, соотвѣтствуетъ уравненіе между координатами ея точекъ.

Установленная такимъ образомъ связь между уравненіемъ $y=f(x)$ и кривой на плоскости позволяетъ привести изученіе формы и свойствъ кривой къ изслѣдованію ея уравненія.

Въ этомъ заключается основная мысль аналитической геометріи.

§ 20. **Геометрическое значеніе системы двухъ уравненій между координатами точки.** Разсматривая *систему* двухъ уравненій

$$y=f(x) \text{ и } y=F(x), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

мы имѣемъ въ виду только тѣ пары чиселъ x и y, которыя удовлетворяютъ тому и другому уравненію. Съ геометрической точки зрѣнія это значитъ, что мы разсматриваемъ только тѣ точки, которыя являются *общими* обѣимъ кривымъ, опредѣляемымъ этими уравненіями. Поэтому, *система двухъ уравненій* (α) *дастъ точки пересѣченія двухъ кривыхъ, опредѣляемыхъ ея уравненіями.*

§ 21. **Уравненіе между полярными координатами точки.** Все, сказанное выше о геометрическомъ значеніи уравненія между декартовыми координатами, приложимо и къ уравненію

$$r=f(\varphi)$$

между *полярными координатами* (§ 7) точки на плоскости. Это уравненіе опредѣляетъ собою кривую, какъ геометрическое мѣсто точекъ, полярныя координаты которыхъ удовлетворяютъ этому уравненію.

Напримѣръ, уравненіе $r=a$ есть геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ радіусъ векторъ имѣетъ постоянную величину a (кругъ съ центромъ въ полюсѣ и радіусомъ a).

Система двухъ уравненій

$$r=f(\varphi) \text{ и } r=F(\varphi)$$

опредѣляетъ точки пересѣченія двухъ кривыхъ, данныхъ этими уравненіями.

§ 22. **Уравненія вида:** $f(x,y)=0$. Сказанное о геометрическомъ значеніи уравненій вида

$$y=f(x) \text{ или } r=f(\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

приложимо и къ уравненіямъ болѣе общаго типа:

$$f(x,\ y)=0 \text{ или } f(r,\ \varphi)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Эти послѣднія указываютъ, что между декартовыми координатами x и y или полярными координатами r и φ существуетъ зависимость, благодаря которой данному значенію x или φ соотвѣтствуютъ одно или нѣсколько значеній соотвѣтственно y или r; другими словами, уравненія (γ) устанавливаютъ такъ же, какъ и уравненія (β), *функціональную зависимость* между x и y или между r и φ. Отсюда вытекаетъ и одинаковое геометрическое значеніе уравненій вида (β) и уравненій вида (γ): уравненія (γ) суть уравненія *кривыхъ* на плоскости.

Функція, опредѣляемая уравненіемъ вида (β), называется *явной* функціей перемѣннаго; функція, опредѣляемая уравненіемъ вида (γ), носитъ названіе *неявной* функціи.

§ 23. **Классификація функцій.** Простѣйшими функціями перемѣннаго x являются результаты совершенія надъ нимъ 6 алгебраическихъ дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возведенія въ степень и извлеченія корня. Эти функціи слѣдующія:

$$1)\ x+a,\ 2)\ \pm(x-a),\ 3)\ ax,\ 4)\ a/x,\ 5)\ x^m,\ 6)\ \sqrt[m]{x},$$

гдѣ a и m суть постоянныя, при чемъ m есть натуральное число.

Первыя пять изъ этихъ функцій называются *раціональными*, а послѣдняя—*ирраціональной*.

Функціи 1), 2), 3), 5) и 6) называются *цѣлыми*, а 4)—*дробною*.

Слѣдующими по сложности функціями является многочленъ

$$p_0x^m+p_1x^{m-1}+\dots+p_{m-1}x+p_m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

гдѣ p со значками суть нѣкоторыя постоянныя числа, а m обозначаетъ натуральное число, и алгебраическая дробь

$$\frac{p_0x^m+p_1x^{m-1}+\dots+p_{m-1}x+p_m}{q_0x^n+q_1x^{n-1}+\dots+q_{n-1}x+q_n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

въ которой p и q суть постоянныя, а m и n натуральныя числа. Многочленъ (δ) называется *цѣлой раціональной функціей степени* m, а дробь (ι) — *дробной раціональной функціей*. Всѣ эти функціи называются *алгебраическими*.

Вообще же y называется алгебраической функціей перемѣннаго x, если она опредѣляется уравненіемъ вида:

$$A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \ldots + A_{m-1} y + A_m = 0,$$

гдѣ m есть натуральное число, а коэффиціенты A съ индексами обозначаютъ *цѣлыя раціональныя* функціи перемѣннаго x. Такъ, напр., каждое изъ уравненій

$$(1 - x)\, y - 1 = 0,$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

опредѣляетъ алгебраическую функцію y перемѣннаго x.

Функціи не алгебраическія носятъ названіе *трансцендентныхъ*. Въ элементарномъ анализѣ изъ такихъ функцій разсматриваются *показательная* функція (a^x), *логариѳмъ* ($\log x$), *тригонометрическія* ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$) и *обратныя круговыя* ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$, $\operatorname{arcsec} x$, $\operatorname{arccosec} x$).

§ 24. Геометрическое значеніе уравненія $z = f(x, y)$. Уравненіемъ

$$z = f(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\zeta$$

z опредѣляется, какъ функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Для каждой пары чиселъ x и y это уравненіе даетъ одно или нѣсколько значеній z. Такимъ образомъ мы получаемъ *тройки* чиселъ x, y, z.

Если принять ихъ за декартовы координаты точки въ пространствѣ, то каждой тройкѣ будетъ соотвѣтствовать *точка* въ пространствѣ (§ 9); давая x и y различныя значенія и вычисляя при помощи уравненія (ζ) соотвѣтственное значеніе z, мы можемъ получить безчисленное множество изолированныхъ точекъ въ пространствѣ.

Полагая въ уравненіи (ζ) y постояннымъ (напр., равнымъ b), мы получимъ уравненіе $z = f(x, b)$ между координатами z и x; если f есть непрерывная относительно x функція, то это уравненіе опредѣляетъ кривую (§ 19), лежащую въ плоскости, параллельной плоскости xz и отстоящей отъ нея на разстояніи b (§ 9). Давая b различныя значенія, можно получить произвольное число такихъ кривыхъ. Если функція f непрерывна и относительно перемѣннаго y, то можно измѣнять y (или, что все равно, b) такъ, чтобы указанныя кривыя расположились какъ угодно тѣснымъ рядомъ. Это вызываетъ въ насъ представленіе о *поверхности*, на которой лежатъ всѣ эти кривыя. Координаты каждой точки этой поверхности удовлетворяютъ уравненію (ζ). Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію, что уравненіе (ζ), въ которомъ x, y и z суть координаты точки въ пространствѣ, есть уравненіе *поверхности*.

То же самое геометрическое значеніе имѣетъ и уравненіе

$$f(x, y, z) = 0,$$

въ которомъ x, y, z суть координаты точки въ пространствѣ (ср. § 22).

ГЛАВА III.

Уравненіе прямой. Основныя задачи на прямую. Функція первой степени.

§ 25. **Уравненіе прямой въ нормальномъ видѣ.** Положеніе прямой относительно данной системы прямоугольныхъ координатъ можно опредѣлить длиною p перпендикуляра OP, опущеннаго на нее изъ начала координатъ, и угломъ α, который образуется этимъ перпендикуляромъ съ положительнымъ направленіемъ оси x. Чтобы найти уравненіе, связывающее координаты ея точекъ, возьмемъ на прямой произвольную точку M (черт. 17), опустимъ изъ нея перпендикуляръ MN на ось x и проектируемъ ломаную $ONMP$ на ея замыкающую OP. Получимъ (§ 8):

$$\text{пр. } ON + \text{пр. } NM + \text{пр. } MP = \text{пр. } OP.$$

Но (§ 8)

$$\text{пр. } ON = ON\cos\alpha; \text{ пр. } NM = NM\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = NM\sin\alpha;$$

$$\text{пр. } MP = MP\cos\frac{\pi}{2} = 0, \text{ пр. } OP = OP.$$

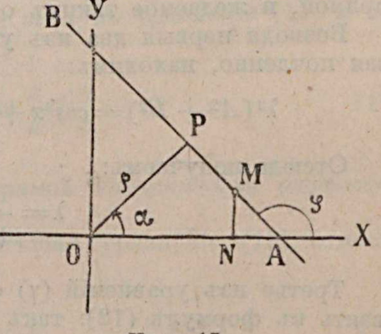
Называя черезъ x и y координаты точки M и замѣчая, что

$$ON = x, \ NM = y,$$

изъ предыдущаго соотношенія находимъ

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p, \text{ или}$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \quad . \ . \ . \ . \ (11)$$



Черт. 17.

Такъ какъ на прямой была взята *произвольная* точка M (x, y), то уравненіе (11) даетъ связь между координатами *любой* точки данной прямой, другими словами, координаты всѣхъ точекъ данной прямой удовлетворяютъ уравненію (11), координаты же точекъ, лежащихъ внѣ этой прямой, уравненію (11) не удовлетворяютъ. Поэтому уравненіе (11) называется *уравненіемъ данной прямой.*

Легко видѣть, что уравненіе *всякой* прямой будетъ того же вида.

Уравненіе (11) есть уравненіе *первой степени* относительно текущихъ координатъ. Слѣд., *уравненіе прямой есть уравненіе первой степени относительно декартовыхъ координатъ* *).

Докажемъ обратное предложеніе: *уравненіе первой степени относительно прямоугольныхъ координатъ есть уравненіе прямой.*

Пусть имѣемъ уравненіе

$$Ax + By + C = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

въ которомъ A, B и C суть данныя числа.

Изъ алгебры извѣстно, что умноженіе обѣихъ частей уравненія на постоянный множитель, отличный отъ нуля, приводитъ къ *равносильному* уравненію, т.-е. такому, которое удовлетворяется тѣми же значеніями перемѣнныхъ, что и данное. Поэтому вмѣсто уравненія (α) можно разсматривать уравненіе

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

въ которомъ λ есть нѣкоторый постоянный множитель. Пользуясь неопредѣленностью этого множителя, попытаемся выбрать его такъ, чтобы

$$\lambda A = \cos\alpha, \ \lambda B = \sin\alpha \text{ и } \lambda C = -p \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Если такое опредѣленіе λ окажется возможнымъ, то уравненіе (β) приметъ видъ уравненія (11), которое служитъ уравненіемъ прямой, и желаемое такимъ образомъ будетъ доказано.

Возводя первыя два изъ уравненій (γ) въ квадратъ и складывая почленно, находимъ:

$$\lambda^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \text{ или } \lambda^2(A^2 + B^2) = 1.$$

Отсюда получаемъ:

$$\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Третье изъ уравненій (γ) опредѣляетъ *знакъ*, который *нужно* взять въ формулѣ (12): такъ какъ p есть величина *существенно положительная*, то λC должно быть *отрицательно;* слѣд., λ и C должны быть *обратныхъ* знаковъ. Такимъ образомъ, для уравненія (α) существуетъ такой множитель, умноженіе на который при-

*) Заключеніе справедливо не только по отношенію къ *прямоугольнымъ* декартовымъ координатамъ, но и по отношенію къ *косоугольнымъ.* См. подробные курсы аналитической геометріи.

водитъ его къ виду (11). Слѣд., *уравненіе первой степени между декартовыми координатами точки есть уравненіе прямой.*

Уравненіе (11) носитъ названіе уравненія прямой *въ нормальномъ видѣ.* Множитель λ называется *нормирующимъ* множителемъ уравненія (α).

Примѣры. 1. Для уравненія $3x - 4y - 15 = 0$ нормирующій множитель раненъ $^1/_5$; α и p опредѣляются уравненіями:

$$\cos\alpha = 0{,}6;\ \sin\alpha = -0{,}8;\ p = 3.$$

2. Для уравненія $40x + 9y + 82 = 0$ имѣемъ:

$$\lambda = -{}^1/_{41};\ \cos\alpha = -{}^{40}/_{41};\ \sin\alpha = -{}^9/_{41};\ p = 2.$$

§ 26. **Уравненіе прямой относительно отрѣзковъ.** Изъ уравненія (11) можно получить уравненіе прямой въ другихъ формахъ.

Если черезъ a и b обозначимъ отрѣзки, отсѣкаемые данной прямой соотвѣтственно на осяхъ x и y, т.-е. положимъ (черт. 17)

$$OA = a \text{ и } OB = b,$$

то изъ треугольниковъ AOP и BOP получимъ

$$p = a\cos\alpha \text{ и } p = b\sin\alpha,$$
$$\text{или } \cos\alpha = p/a \text{ и } \sin\alpha = p/b.$$

Подставляя эти значенія $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ въ уравненіи (11) и сокращая на p ($p \neq o$), находимъ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Это уравненіе есть уравненіе прямой *относительно отрѣзковъ, образуемыхъ ею на осяхъ координатъ.*

§ 27. **Уравненіе** $y = kx + b$. Рѣшая уравненіе (13) относительно y, получимъ уравненіе

$$y = -\frac{b}{a}x + b.$$

Изъ треугольника AOB, въ которомъ a и b суть катеты, находимъ:

$$\frac{b}{a} = \tan \widehat{BAO}.$$

Если обозначимъ черезъ φ уголъ $\widehat{xAB}$, образуемый прямой съ *положительнымъ* направленіемъ оси x, то

$BAO = \pi - \varphi$ и $tan\ BAO = tan\ (\pi - \varphi) = -tan\ \varphi$; слѣд., $\frac{b}{a} = -tan\ \varphi$.

Полагая $tan\ \varphi = k$, получимъ уравненіе прямой въ слѣдующемъ видѣ:

$$y = kx + b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

Въ каждомъ изъ уравненій (11), (13) и (14) имѣются двѣ постоянныя для данной прямой величины: p и α въ уравненіи (11), a и b въ уравненіи (13), k и b въ уравненіи (14).

Эти величины носятъ названіе *параметровъ*. Два параметра опредѣляютъ положеніе прямой относительно системы осей координатъ. Параметръ k въ уравненіи (14) называется *угловымъ коэффиціентомъ* прямой.

§ 28. **Частные случаи уравненія прямой.** Разсмотримъ уравненіе

$$Ax + By + C = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\alpha)$$

при нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ относительно коэффиціентовъ A, B и C.

1) $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Уравненіе (α) удовлетворяется въ этомъ случаѣ значеніями $x = 0$, $y = 0$. Слѣд., прямая, для которой оно служитъ уравненіемъ, проходитъ черезъ точку (0,0), т.-е. черезъ начало координатъ. Итакъ, уравненіе прямой, проходящей черезъ начало координатъ, имѣетъ видъ

$$Ax + By = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\beta)$$

2) $A \neq 0$, $B = 0$, $C \neq 0$. Въ этомъ случаѣ уравненіе (α) обращается въ уравненіе:

$$Ax + C = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma)$$

Рѣшая его, находимъ:

$$x = -\frac{C}{A} = a.$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что всѣ точки прямой имѣютъ *постоянную* абсциссу, т.-е. равно удалены отъ оси y (§ 2). Прямая, обладающая этимъ свойствомъ, *параллельна* оси y. Слѣд., уравненіе (γ) есть уравненіе прямой, параллельной оси y.

3) $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$. Разсуждая такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, найдемъ, что уравненіе

$$By+C=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\gamma')$$

есть уравненіе прямой, параллельной оси x.

4) $A\neq 0$, $B=0$, $C=0$. Уравненіе (α) приводится къ уравненію

$$Ax=0 \text{ или } x=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\delta)$$

Разсматриваемый случай есть комбинація случаевъ 1 и 2. Уравненіе (δ) есть уравненіе оси y.

5) $A=0$, $B\neq 0$, $C=0$. Уравненіе

$$By=0 \text{ или } y=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\varepsilon)$$

есть уравненіе оси x.

6) $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$. Уравненіе (α) при подстановкѣ этихъ значеній коэффиціентовъ приводится къ уравненію

$$C=0 \text{ или } 1=0,$$

которое представляетъ очевидную нелѣпость. Полученіе этого результата явилось слѣдствіемъ того, что мы въ уравненіи (α) приняли коэффиціенты A и B *равными* нулю. Къ другому заключенію мы придемъ, если будемъ разсматривать *приближеніе* этихъ коэффиціентовъ къ нулю, т.-е. будемъ считать A и B измѣняющимися и въ своихъ измѣненіяхъ *приближающимися* къ нулю. Замѣтивъ, что уравненіе (α) при коэффиціентахъ A, B и C, отличныхъ отъ нуля, равносильно уравненію

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1,$$

которое имѣетъ тотъ же видъ, что и уравненіе (13), мы заключаемъ, что отношенія $-C/A$ и $-C/B$ суть мѣры *отрѣзковъ*, образуемыхъ прямой на осяхъ координатъ. Если, при C постоянномъ, коэффиціенты A и B неограниченно приближаются къ нулю, то эти отношенія безгранично возрастаютъ по абсолютному значенію. Поэтому при измѣненіи A и B и стремленіи ихъ къ нулю уравненіе (α) выражаетъ прямыя, все болѣе и болѣе отдаленныя отъ начала координатъ. Полученное выше нелѣпое уравненіе $1=0$ можно разсматривать, какъ *предѣльный* случай этого пере-

мѣннаго уравненія, и принять его за уравненіе *безконечно удаленной* прямой *).

§ 29. **Построеніе прямой, данной уравненіемъ.** Для построенія прямой, данной уравненіемъ, проще всего найти какія-нибудь *двѣ* ея точки; соединивъ эти точки, мы получимъ искомую прямую.

Примѣръ 1. Дано уравненіе $2x-3y-12=0$. Чтобы найти двѣ точки, лежащія на этой прямой, дадимъ одной изъ координатъ какое-нибудь значеніе и вычислимъ изъ уравненія соотвѣтственное значеніе другой. Пусть $x=0$; подставивъ въ данное уравненіе $x=0$ и опредѣляя y, находимъ $y=-4$. Слѣд., точка $(0, -4)$ находится на нашей прямой. Чтобы найти другую точку ея, положимъ, напр., $y=0$. При $y=0$ уравненіе даетъ: $x=6$. Слѣд., на прямой находится точка $(6,0)$. Построимъ эти точки; прямая, соединяющая ихъ, есть искомая *(рекомендуется сдѣлать чертежъ)*.

Примѣръ 2. Построить прямую, данную уравненіемъ $x-y=0$. Данная уравненіемъ прямая проходитъ черезъ начало координатъ (§ 28,1); для построенія ея достаточно найти еще одну точку. Полагая, напр., $x=1$, находимъ $y=1$. Слѣд., точка $(1,1)$ находится на прямой. Прямая, соединяющая точки $(0,0)$ и $(1,1)$, есть искомая.

Примѣръ 3. Построить прямую, данную уравненіемъ $2y+5=0$.

Прямая параллельна оси x и находится отъ нея на разстояніи $-2,5$ (§ 28,2).

§ 30. **Задача 1.** *Даны двѣ прямыя уравненіями:*

$$y=kx+b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$
$$y=k_1x+b_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Требуется найти уголъ между ними.

Пусть прямая (α) составляетъ съ положительнымъ направленіемъ оси x уголъ φ, а прямая (β) — уголъ φ_1; уголъ между прямыми обозначимъ черезъ θ (черт. 18). Пользуясь извѣстнымъ свойствомъ внѣшняго угла треугольника, находимъ

$$\varphi=\varphi_1+\theta, \text{ откуда } \theta=\varphi-\varphi_1.$$

*) Допускается, что на плоскости существуетъ только *одна безконечно удаленная прямая,* такъ что способъ безграничнаго возрастанія абсолютнаго значенія отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ прямой на осяхъ координатъ, не имѣетъ никакого значенія при удаленіи ея въ безконечность.

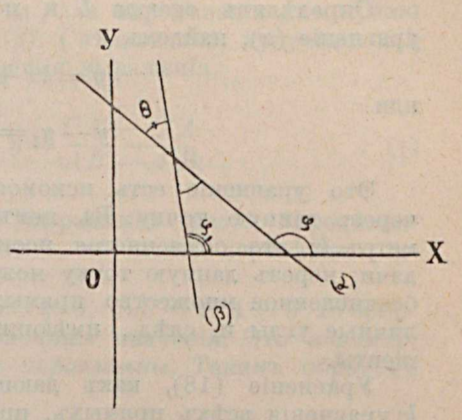
Но данныя уравненія (α) и (β) не содержатъ угловъ φ и φ_1 непосредственно; въ нихъ входятъ *тангенсы* этихъ угловъ (§ 27):

$$k = tan\,\varphi,\ k_1 = tan\,\varphi_1.$$

Чтобы воспользоваться данными величинами k и k_1, найдемъ $tan\,\theta$:

$$tan\,\theta = tan(\varphi - \varphi_1) = \frac{tan\,\varphi - tan\,\varphi_1}{1 + tan\,\varphi\,tan\,\varphi_1}$$

$$tan\,\theta = \frac{k - k_1}{1 + kk_1} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (15)$$



Черт. 18.

Эта формула рѣшаетъ вопросъ объ углѣ между прямыми.

Если $k = k_1$, то $tan\,\theta = 0$, $\theta = 0$, т.-е. прямыя (α) и (β) *параллельны*.

Обратно, если прямыя параллельны, то $\theta = 0$ и, слѣд., $k = k_1$. Поэтому условіе параллельности двухъ прямыхъ заключается *въ равенствѣ ихъ угловыхъ коэффиціентовъ*:

$$k = k_1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (16)$$

Если $1 + kk_1 = 0$, то $tan\,\theta = \infty$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, т.-е. прямыя *перпендикулярны* другъ къ другу. Обратно, если $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $tan\,\theta = \infty$ и $1 + kk_1 = 0$.

Итакъ, условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ выражается слѣдующимъ уравненіемъ между ихъ угловыми коэффиціентами:

$$1 + kk_1 = 0 \text{ или } k_1 = -\frac{1}{k} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (17)$$

§ 31. **Задача 2.** *Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку.*

Пусть дана точка (x_1, y_1). Уравненіе всякой прямой есть

$$y = kx + b \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\alpha)$$

Если прямая проходитъ черезъ точку (x_1, y_1), то координаты точки должны удовлетворять уравненію прямой; поэтому

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Опредѣливъ отсюда b и поставивъ найденное значеніе въ уравненіе (α), найдемъ

$$y = kx + y_1 - kx_1,$$

или

$$y - y_1 = k\ (x - x_1) \quad \text{. . . . . (18)}$$

Это уравненіе есть искомое уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку. Въ немъ остается *неопредѣленнымъ* параметръ k; это объясняется неопредѣленностью поставленной задачи: черезъ данную точку можно провести не *одну* прямую, а безчисленное множество прямыхъ, образующихъ съ осью x различные углы и, слѣд., имѣющихъ различные угловые коэффиціенты.

Уравненіе (18), какъ дающее при различныхъ значеніяхъ k уравненія всѣхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку (x_1, y_1), называется уравненіемъ *пучка прямыхъ*, проходящихъ черезъ точку (x_1, y_1).

§ 32. **Задача 3.** *Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныхъ точки.*

Пусть даны точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Уравненіе прямой, проходящей черезъ первую изъ нихъ, есть уравненіе (18). Если прямая проходитъ и черезъ вторую точку, то

$$y_2 - y_1 = k\ (x_2 - x_1).$$

Опредѣливъ изъ этого уравненія k и подставивъ найденное значеніе въ уравненіе (18), получимъ:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

или

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{. . . . . (19)}$$

Это и есть искомое уравненіе.

§ 33. **Задача 4.** *Найти точку пересѣченія двухъ прямыхъ, данныхъ ихъ уравненіями.*

Пусть уравненія данныхъ прямыхъ таковы:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{. . . . . (}\alpha\text{)}$$
$$A'x + B'y + C' = 0 \quad \text{. . . . . (}\beta\text{)}$$

Найти точку пересѣченія двухъ прямыхъ значитъ найти ихъ *общую* точку. Координаты этой точки должны удовлетворять

уравненіямъ обѣихъ прямыхъ. Слѣд., для опредѣленія ихъ нужно рѣшить систему уравненій (α) и (β). Сдѣлавъ это, получимъ для координатъ искомой точки слѣдующія выраженія:

$$x=\frac{BC'-B'C}{AB'-A'B},\ y=\frac{CA'-C'A}{AB'-A'B}\ \ldots\ldots\ (\gamma)$$

Если $AB'-A'B\neq 0$, то эти выраженія даютъ опредѣленныя значенія для x и y. Это значитъ, что точка пересѣченія *существуетъ*.

Если $AB'-A'B=0$, $BC'-B'C\neq 0$, $CA'-C'A\neq 0$, то формулы (γ) даютъ для x и y безконечныя значенія. Это значитъ, что прямыя *не пересѣкаются*, т.-е. *параллельны*. Такимъ образомъ равенство

$$AB'-A'B=0\ \ldots\ldots\ldots\ (\delta)$$

является *условіемъ параллельности* прямыхъ (α) и (β).

Равенство (δ) можно замѣнить равенствомъ

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'},\ \ldots\ldots\ldots\ (\varepsilon)$$

выражающимъ пропорціональность коэффиціентовъ при одноименныхъ координатахъ въ двухъ уравненіяхъ. Принимая во вниманіе, что угловые коэффиціенты прямыхъ (α) и (β) соотвѣтственно $-\frac{A}{B}$ и $-\frac{A'}{B'}$, мы видимъ, что уравненія (ε) и (16) имѣютъ одинаковый геометрическій смыслъ.

Если $AB'-A'B=0$, $BC'-B'C=0$ и $CA'-C'A=0$ . . (ζ)

то уравненія (γ) даютъ для x и y выраженія *неопредѣленнаго* вида $\frac{0}{0}$. Чтобы выяснить геометрическій смыслъ этого результата, замѣтимъ, что изъ условій (ζ) вытекаютъ равенства

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

устанавливающія пропорціональность соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ двухъ уравненій (α) и (β). Обозначивъ предыдущія отно-

шенія черезъ $\frac{1}{m}$, найдемъ, что $A' = mA$, $B' = mB$, $C' = mC$, такъ что уравненіе (β) приводится къ уравненію

$$m(Ax + By + C) = 0,$$

которое *равносильно* уравненію (α), и, слѣд., оба уравненія (α) и (β) опредѣляютъ одну и ту же прямую. Поэтому задача приводится къ задачѣ о пересѣченіи двухъ *сливающихся* прямыхъ, за точку пересѣченія которыхъ можно принять *любую* ихъ точку.

§ 34. Задача 5. Найти разстояніе точки отъ прямой.

Пусть дана (черт. 19) точка $M(x_1, y_1)$ и прямая (α) уравненіемъ въ нормальномъ видѣ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

Проведемъ черезъ точку M прямую, параллельную данной прямой (α). Перпендикуляръ, опущенный на эту прямую изъ начала координатъ, образуетъ съ осью x либо уголъ α, либо уголъ $\pi + \alpha$. Въ первомъ случаѣ его направленіе совпадаетъ съ направленіемъ перпендикуляра p, а во второмъ противоположно ему. Если длину этого перпендикуляра обозначимъ черезъ p_1, то прямая, проведенная черезъ точку M параллельно данной, въ первомъ случаѣ опредѣляется уравненіемъ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta)$$

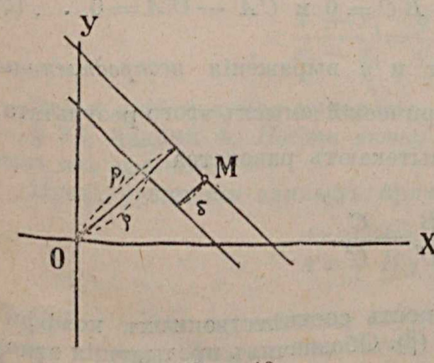
а во второмъ случаѣ уравненіемъ:

$x \cos(\pi + \alpha) + y \sin(\pi + \alpha) - p_1 = 0$ или $x \cos \alpha + y \sin \alpha + p_1 = 0$ . . . (β')

Уравненія (β) и (β') можно объединить въ одно (β), допустивъ для p_1 отрицательныя значенія.

Чтобы опредѣлить p_1, замѣтимъ, что точка $M(x_1, y_1)$ лежитъ на прямой (β) по построенію; поэтому

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p_1 = 0 \text{ и}$$
$$p_1 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha.$$



Черт. 19.

Легко видѣть, что разстояніе точки M отъ прямой (α) равно $p_1 - p$. Обозначая это разстояніе черезъ δ и пользуясь значеніемъ p_1, получаемъ

$$\delta = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p \, . \, . \, . \quad (20)$$

Вторая часть этой формулы получается черезъ подстановку координатъ данной точки вмѣсто текущихъ координатъ въ пер-

вую часть уравненія данной прямой въ *нормальномъ* видѣ. Если уравненіе прямой дано не въ нормальномъ видѣ, то для вычисленія разстоянія точки отъ прямой слѣдуетъ *привести ея уравненіе къ нормальному виду* (§ 25) и затѣмъ воспользоваться формулой (20).

При вычисленіи разстоянія точки отъ прямой по формулѣ (20) можетъ получиться *положительное и отрицательное* число и *нуль*. Положительное число получается, когда $p_1 > p$, т.-е. для всѣхъ точекъ плоскости, которыя *отдѣлены отъ начала координатъ* данной прямой; *отрицательное* число получается, когда $p_1 < p$, т.-е. для всѣхъ точекъ плоскости, лежащихъ съ началомъ координатъ по *одну* сторону данной прямой. Эти двѣ части плоскости раздѣляются данной прямой, для точекъ которой разсматриваемое разстояніе равно *нулю*.

§ 35. **Функція первой степени.** Въ § 27 указано геометрическое значеніе уравненія

$$y = ax + b, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

гдѣ a и b суть постоянныя, или, другими словами, построенъ *графикъ цѣлой раціональной функціи первой степени* (§ 23). Эта функція называется также *линейной* функціей перемѣннаго x.

Разсмотримъ свойства линейной функціи.

Обозначимъ черезъ Δx и Δy соотвѣтственныя измѣненія, или, какъ ихъ обыкновенно называютъ, *приращенія* перемѣннаго x и функціи y. Вставляя въ правую часть уравненія (α) $x + \Delta x$ вмѣсто x, мы получимъ въ лѣвой части $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = a\ (x + \Delta x) + b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Черезъ почленное вычитаніе уравненія (α) изъ уравненія (β) находимъ:

$$\Delta y = a\,\Delta x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Это равенство приводитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) *Если* $a > 0$, *то приращенія* Δx *и* Δy *одного знака, т.-е. функція* y *возрастаетъ* ($\Delta y > 0$) *при возрастаніи перемѣннаго* x ($\Delta x > 0$) *и убываетъ* ($\Delta y < 0$) *при убываніи перемѣннаго* ($\Delta x < 0$).

Въ этомъ случаѣ графикомъ функціи служитъ прямая, образующая съ положительнымъ направленіемъ оси x *острый* уголъ, такъ какъ тангенсъ этого угла $= a > 0$. Ординаты ея точекъ возрастаютъ вмѣстѣ съ абсциссами.

2) *Если* $a < 0$, *то приращенія* Δx *и* Δy *разныхъ знаковъ, т.-е. функція* y *убываетъ* ($\Delta y < 0$) *при возрастаніи* x ($\Delta x > 0$) *и возрастаетъ* ($\Delta y > 0$) *при убываніи* x ($\Delta x < 0$).

Графикомъ функціи служитъ прямая, образующая *тупой* уголъ съ положительнымъ направленіемъ оси x.

3) *Равнымъ приращеніямъ перемѣннаго соотвѣтствуютъ равныя приращенія функціи*, или, другими словами, *приращенія функціи пропорціональны приращеніямъ перемѣннаго.*

4) *Функція непрерывна при всѣхъ значеніяхъ* x.

Дѣйствительно, чтобы $|\Delta y| < \varepsilon$, достаточно взять $|\Delta x| < \varepsilon / |a|$ (§ 16).

Если въ уравненіи (γ) положимъ $\Delta x = 1$, то найдемъ, что $\Delta y = a$. Это значитъ, что *постоянная* a *есть приращеніе функціи, соотвѣтствующее увеличенію перемѣннаго на единицу.* Эта постоянная a, равная (см. ур. (γ)) отношенію $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращенія функціи къ приращенію перемѣннаго, служитъ мѣрою *скорости* измѣненія функціи *).

Свойство 3) служитъ *характеристикой* функціи. Если приращенія Δy функціи y пропорціональны приращеніямъ Δx перемѣннаго x, то y есть *линейная* функція x. Дѣйствительно, обозначимъ черезъ x, y и x_1, y_1 двѣ пары соотвѣтственныхъ значеній перемѣннаго и функціи. При этихъ обозначеніяхъ

$$\Delta x = x - x_1,\ \Delta y = y - y_1.$$

По предположенію $\Delta y = a\Delta x$; слѣд.,

$$y - y_1 = a(x - x_1),$$

или

$$y = ax + (y_1 - ax_1).$$

Если x и y обозначаютъ перемѣнныя соотвѣтственныя значенія независимаго перемѣннаго и функціи, а x_1 и y_1 — постоянныя, то послѣднее уравненіе отличается отъ уравненія (α) только обозначеніемъ одного изъ коэффиціентовъ. Желаемое такимъ образомъ доказано.

Упражненія къ главѣ III.

1. *Построить прямыя, данныя слѣдующими уравненіями:*

a) $2x - 3y = 6$.
b) $2x - 3y = 0$.
c) $y = x + 1$.
d) $x + 3 = 0$.

*) Ср. скорость въ равномѣрномъ движеніи.

2. *Найти точки пересѣченія прямой a) предыдущей задачи съ прямыми b, c, d.*

3. *Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точки* (2,—1) *и* (—3,—2).

Отв. $x - 5y - 7 = 0$.

4. *Найти уравненіе, связывающее координаты точекъ, равноудаленныхъ отъ точекъ* (2, — 1) *и* (— 3, — 2). *Указать его геометрическое значеніе (см. зад. 3).*

Отв. $5x + y + 4 = 0$.

5. *Найти уголъ между прямыми:*

$$x - y + 1 = 0;\quad y = (2 - \sqrt{3})x.$$

Отв. 30^0.

6. *Найти уголъ между прямыми*

$$3x + y - 6 = 0,\quad x - y - 1 = 0.$$

Отв. $\tan\Theta = 2$.

7. *Написать уравненіе прямой, проходящей черезъ точку* (2,5) *и параллельной прямой* $2x - y = 0$.

Отв. $2x - y + 1 = 0$.

8. *Написать уравненіе прямой, проходящей черезъ точку* (2,5) *и перпендикулярной къ прямой* $2x - y = 0$.

Отв. $x + 2y - 12 = 0$.

9. *Написать уравненіе прямой, проходящей черезъ точку* (1,1) *и составляющей уголъ въ* 45^0 *съ прямой* $x + 2y - 4 = 0$.

Отв. $3x + y - 4 = 0$.

10. *Лежатъ ли три точки* (1,1), (—2,10), (0,4) *на одной прямой?*

Отв. Да, на прямой $3x + y - 4 = 0$.

11. *При какомъ условіи три точки* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) *лежатъ на одной прямой?*

Отв. $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$. (Ср. § 5).

12. *Проходятъ ли три прямыя*

$$\begin{aligned} 2x - y - 4 &= 0,\\ 3x + 2y - 6 &= 0,\\ x - 4y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

черезъ одну точку?

Отв. Да, черезъ точку (2,0).

13. *При какомъ условіи три прямыя*

$$y = k_1x + b_1,\quad y = k_2x + b_2,\quad y = k_3x + b_3$$

проходятъ черезъ одну точку?

Отв. $k_1(b_2 - b_3) + k_2(b_3 - b_1) + k_3(b_1 - b_2) = 0$.

14. *Вершинами треугольника служатъ точки* $A(2,3)$, $B(6,-1)$ *и* $C(0,-7)$. *Найти длину его сторонъ и уравненія сторонъ. Показать, что этотъ треугольникъ прямоугольный.*

Отв. $AB = 4\sqrt{2}$; ур-іе AB: $x + y - 5 = 0$;
$BC = 6\sqrt{2}$; ур-іе BC: $x - y - 7 = 0$;
$AC = 2\sqrt{26}$; ур-іе AC: $5x - y - 7 = 0$.

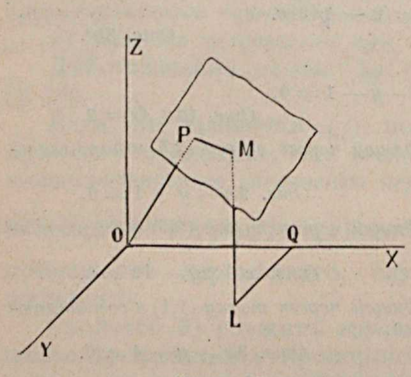
15. *Найти разстояніе точекъ* (5,—4) *и* (4,1) *отъ прямой* $5x - 12y - 60 = 0$.

Отв. 1; — 4.

ГЛАВА IV.

Уравненіе плоскости. Различные виды его. Задачи на плоскость.

§ 36. **Уравненіе плоскости въ нормальномъ видѣ.** Положеніе плоскости относительно данной системы прямоугольныхъ координатъ въ пространствѣ можно опредѣлить длиною p перпендикуляра OP, опущеннаго на нее изъ начала O, и углами α, β, γ, которые образуетъ этотъ перпендикуляръ соотвѣтственно съ осями x, y и z. Чтобы найти уравненіе, связывающее координаты точекъ плоскости, возьмемъ на ней произвольную точку M (черт. 20), опустимъ изъ нея перпендикуляръ ML на плоскость xy, изъ точки L перпендикуляръ LQ на ось x и, соединивъ точки P и M прямой, проектируемъ ломаную $OQLMP$ на ея замыкающую OP. Получимъ (§ 12):



Черт. 20.

$$\text{пр. } OQ + \text{пр. } QL + \text{пр. } LM + \\ + \text{пр. } MP = \text{пр. } OP.$$

Но (§ 12) пр. $OQ = OQ\,cos\alpha$;

пр. $QL = QL cos\beta$; пр. $LM = LM cos\gamma$;

пр. $MP = 0$; пр. $OP = OP$.

Называя черезъ x, y, z координаты точки M и замѣчая, что

$$OQ = x,\ QL = y,\ LM = z,$$

изъ предыдущаго соотношенія между проекціями находимъ:

$$x cos\alpha + y cos\beta + z cos\gamma = p,$$

или

$$x cos\alpha + y cos\beta + z cos\gamma - p = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

Такъ какъ на плоскости была взята произвольная точка $M(x, y, z)$, то уравненіе (21) связываетъ координаты *любой* точки данной плоскости; слѣд., это есть *уравненіе данной плоскости*. Уравненіе (21) называется уравненіемъ плоскости въ *нормальномъ видѣ*.

Въ уравненіе (21) входятъ 4 параметра: α, β, γ и p, но независимыхъ изъ нихъ только *три*, такъ какъ углы α, β, γ связаны соотношеніемъ (10) (§ 12).

Легко видѣть, что уравненіе всякой плоскости есть уравненіе вида (21).

Уравненіе (21) есть уравненіе *первой* степени относительно текущихъ координатъ. Слѣд., *уравненіе плоскости есть уравненіе первой степени относительно текущихъ координатъ* *).

Докажемъ обратное предложеніе: *уравненіе первой степени относительно координатъ x, y, z есть уравненіе плоскости.*

---

*) Заключеніе справедливо и въ случаѣ косоугольныхъ координатъ.

Пусть имѣемъ уравненіе

$$Ax+By+Cz+D=0, \dots \dots \dots (\alpha)$$

въ которомъ A, B, C и D суть данныя числа.

Умноживъ обѣ части его на множитель λ, попробуемъ опредѣлить λ такъ, чтобы новое уравненіе имѣло видъ уравненія (21). Для этого нужно, чтобы

$$\lambda A=\cos\alpha;\quad \lambda B=\cos\beta;\ \lambda C=\cos\gamma;\ \lambda D=-p \dots \dots (\beta)$$

Возводя первыя три изъ этихъ равенствъ въ квадратъ и складывая почленно, находимъ (§ 13)

$$\lambda^2(A^2+B^2+C^2)=1,$$

откуда

$$\lambda=\frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \dots \dots \dots (22$$

Послѣднее изъ равенствъ (β) указываетъ, что знакъ λ противоположенъ знаку D, такъ какъ $p>0$.

Такимъ образомъ опредѣленіе λ изъ условій (β) оказывается возможнымъ и даетъ единственный результатъ. Слѣд., *уравненіе* (α), *какъ приводимое къ виду* (21), *есть уравненіе плоскости.*

Множитель λ называется *нормирующимъ множителемъ.*

Изъ равенствъ (β) слѣдуетъ, что

$$\frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\cos\beta}=\frac{C}{\cos\gamma},$$

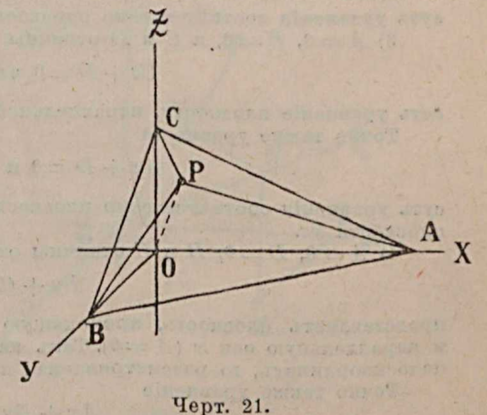
т.-е. что *коэффиціенты A, B и C въ уравненіи* (α) *плоскости пропорціональны косинусамъ угловъ, образуемыхъ перпендикуляромъ къ этой плоскости соотвѣтственно съ осями x, y и z.*

§ 37. **Уравненіе плоскости относительно отрѣзковъ.** Изъ уравненія (21) легко получить другой видъ уравненія плоскости, именно уравненіе, въ которомъ параметрами являются отрѣзки, отсѣкаемые плоскостью на осяхъ координатъ. Пусть A, B и C суть точки пересѣченія плоскости соотвѣтственно съ осями x, y, z и $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$. Соединивъ основаніе P перпендикуляра на плоскость изъ начала координатъ съ точками A, B, C (черт. 21), мы получимъ три прямоугольныхъ треугольника OPA, OPB и OPC, изъ которыхъ находимъ

$$\cos\alpha=p/a;\ \cos\beta=p/b;\ \cos\gamma=p/c.$$

Вставляя эти значенія $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ въ уравненіе (21) и сокращая на p, получаемъ уравненіе

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$$



Черт. 21.

или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Это уравненіе называется уравненіемъ плоскости относительно отрѣзковъ, отсѣкаемыхъ ею на осяхъ координатъ.

Упражненіе. *Показать, что плоскость*

$$Ax+By+Cz+D=0$$

отсѣкаетъ на осяхъ координатъ отрѣзки:

$$a=-D/A;\ b=-D/B;\ c=-D/C.$$

§ 38. **Частные случаи уравненія плоскости.** Разсмотримъ уравненіе

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

въ тѣхъ случаяхъ, когда одинъ или нѣсколько коэффиціентовъ его обращаются въ нули.

1. $D=0$, A, B, C отличны отъ нуля. Уравненіе

$$Ax+By+Cz=0$$

удовлетворяется при $x=0$, $y=0$, $z=0$ и представляетъ уравненіе плоскости, *проходящей черезъ начало координатъ.*

2) $A=0$, B, C, D отличны отъ нуля. Уравненіе

$$By+Cz+D=0$$

есть уравненіе плоскости, отсѣкающей на оси x безконечно большой отрѣзокъ, а на другихъ осяхъ конечные отрѣзки (см. § 37, упр.). Такая плоскость *параллельна оси* x.

Точно также уравненія

$$Ax+Cz+D=0 \text{ и } Ax+By+D=0$$

суть уравненія соотвѣтственно плоскостей, параллельныхъ оси y и оси z.

3) $A=0$, $B=0$, а C и D отличны отъ нуля. Уравненіе

$$Cz+D=0 \text{ или } z=\text{пост.}$$

есть уравненіе плоскости, параллельной плоскости xy.

Точно также уравненія

$$Ax+D=0 \text{ и } By+D=0$$

суть уравненія соотвѣтственно плоскостей, параллельныхъ плоскости yz и плоскости xz.

4) $A=0$, $D=0$, B и C отличны отъ нуля. Уравненіе

$$By+Cz=0$$

представляетъ плоскость, проходящую черезъ начало координатъ ($D=0$) и параллельную оси x ($A=0$). Такъ какъ ось x сама проходитъ черезъ начало координатъ, то разсматриваемая плоскость *проходитъ черезъ ось* x.

Точно также уравненіе

$$Ax+By=0$$

есть уравненіе плоскости, проходящей черезъ ось z, и уравненіе

$$Ax + Cz = 0$$

есть уравненіе плоскости, проходящей черезъ ось y.

5) $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D \neq 0$. Уравненіе (α) можно въ этомъ случаѣ разсматривать какъ уравненіе *безконечно удаленной плоскости* (см. § 28).

Упражненія. 1. *Какое геометрическое значеніе имѣетъ уравненіе*

$$Ax + Cz + D = 0,$$

разсматриваемое по отношенію къ плоскости xz? (*Сдѣлать чертежъ*).

2. *Тотъ же вопросъ относительно уравненія* $Ax + Cz = 0$. (*Сдѣлать чертежъ.*)

§ 39. **Уголъ между двумя плоскостями.** Пусть даны двѣ плоскости уравненіями

$$x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (\alpha)$$
$$x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (\beta)$$

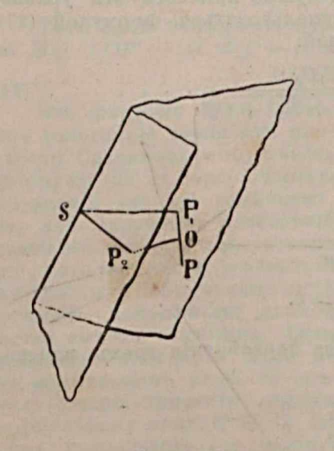
Требуется опредѣлить уголъ между ними.

Извѣстно, что уголъ между двумя плоскостями (двугранный) измѣряется его *линейнымъ* угломъ. Пусть P_1SP_2 есть линейный уголъ двуграннаго угла, составленнаго плоскостями (α) и (β) (черт. 22). Взявъ въ его плоскости произвольную точку O и опустивъ изъ нея перпендикуляры OP_1 и OP_2 на плоскости (α) и (β), находимъ, что

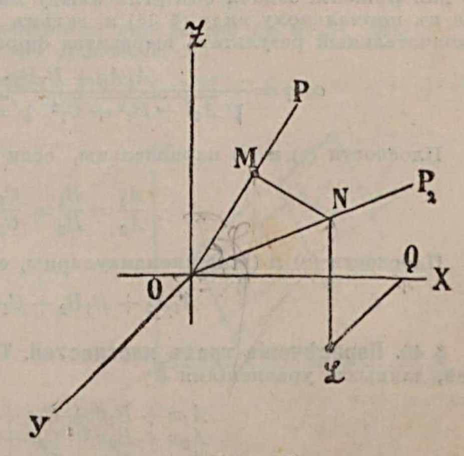
$$\angle POP_2 = \angle P_1SP_2,$$

гдѣ OP есть продолженіе перпендикуляра P_1O.

Слѣд., задача сводится къ опредѣленію угла между двумя прямыми OP и OP_2, которыя перпендикулярны соотвѣтственно къ плоскостямъ (α) и (β). Ихъ направленія опредѣляются углами, которые онѣ составляютъ съ осями координатъ (α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2).



Черт. 22.



Черт. 23.

Чтобы опредѣлить этотъ уголъ, возьмемъ на прямой OP_2 (черт. 23), произвольную точку N и опустимъ изъ нея перпендикуляръ NM на прямую OP. Обозначая уголъ P_2OP черезъ φ, изъ треугольника OMN находимъ:

$$OM = ON\cos\varphi.$$

Съ другой стороны, обозначивъ черезъ x, y, z координаты точки N, имѣемъ (§ 12):

$$x = ON\cos\alpha_2,\ y = ON\cos\beta_2,\ z = ON\cos\gamma_2.$$

Построивъ эти координаты ($OQ = x$, $QL = y$, $LN = z$) и проектируя ломаную $OQLNM$ на ея замыкающую, получимъ при помощи предыдущихъ равенствъ слѣдующее соотношеніе:

$$ON\cos\alpha_2\cos\alpha_1 + ON\cos\beta_2\cos\beta_1 + ON\cos\gamma_2\cos\gamma_1 = ON\cos\varphi.$$

Отсюда находимъ:

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 \quad \ldots\ldots (23)$$

Этой формулой рѣшается вопросъ о вычисленіи угла между двумя прямыми, направленія которыхъ даны, и между двумя плоскостями, которыя даны своими уравненіями.

Если прямыя (α_1, β_1, γ_1) и (α_2, β_2, γ_2) параллельны, то

$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2;$$

если прямыя перпендикулярны, то $\cos\varphi = 0$, т.-е.

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0.$$

Если плоскости даны уравненіями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \ldots\ldots (\gamma)$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \ldots\ldots (\delta)$$

то для рѣшенія задачи объ углѣ между ними нужно привести эти уравненія къ нормальному виду (§ 36) и затѣмъ воспользоваться формулой (23). Окончательный результатъ выразится формулой:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad \ldots\ldots (24)$$

Плоскости (γ) и (δ) параллельны, если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Плоскости (γ) и (δ) перпендикулярны, если

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

§ 40. **Пересѣченіе трехъ плоскостей.** Точка пересѣченія трехъ плоскостей, данныхъ уравненіями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

имѣетъ координаты, которыя должны удовлетворять каждому изъ этихъ трехъ уравненій. Слѣд., опредѣленіе этой точки сводится къ рѣшенію системы трехъ линейныхъ уравненій.

§ 41. **Уравненіе плоскости, данной тремя точками.** Пусть даны три точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). Требуется найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ эти три точки. Ограничимся указаніемъ хода рѣшенія этой задачи.

Общее уравненіе плоскости есть

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для того, чтобы плоскость, опредѣляемая этимъ уравненіемъ, проходила черезъ данныя точки, нужно, чтобы удовлетворялись уравненія:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0,$$
$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0.$$

Изъ этихъ трехъ уравненій можно опредѣлить *отношенія* трехъ коэффиціентовъ къ четвертому, напр., отношенія A/D, B/D и C/D.

Если же эти отношенія будутъ извѣстны, то и искомое уравненіе будетъ найдено.

§ 42. **Разстояніе точки отъ плоскости.** Пусть дана плоскость уравненіемъ:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

и точка $M(x_1, y_1, z_1)$. Требуется найти разстояніе точки отъ плоскости. Искомое разстояніе измѣряется длиною перпендикуляра MQ (черт. 24), опущеннаго изъ M на плоскость (α).

Проведемъ черезъ M плоскость (β), параллельную данной плоскости. Ея уравненіе таково (§ 39):

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta$$

гдѣ p' есть длина перпендикуляра OP, опущеннаго на нее изъ начала координатъ. Такъ какъ плоскость (β) проходитъ черезъ точку M, то

$$x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p' = 0,$$

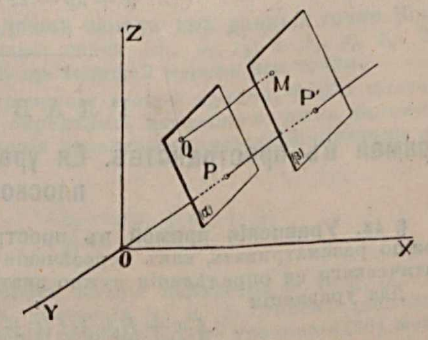
откуда находимъ:

$$p' = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Такъ какъ, вслѣдствіе параллельности плоскостей (α) и (β), $MQ = P'P$) то $MQ = OP' - OP = p' - p$, или, по уравненію (γ),

$$MQ = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

Эта формула даетъ искомое разстояніе точки отъ плоскости. Сравнивая вторую часть формулы (25) съ первой частью уравненія (α), мы замѣчаемъ, что для полученія разстоянія точки отъ плоскости достаточно въ первую часть уравненія плоскости въ нормальномъ видѣ вставить координаты данной точки вмѣсто текущихъ. Если уравненіе плоскости дано не въ нормальномъ видѣ, то сначала нужно привести его къ нормальному виду (§ 36) и затѣмъ воспользоваться формулой (25).



Черт. 24.

Изъ того, что $MQ = p' - p$, слѣдуетъ, что формула (25) даетъ для MQ *положительное* число, когда точки O и M лежатъ по *разныя* стороны плоскости, и *отрицательное*, когда точки O и M лежатъ по *одну* сторону ея. (Ср. § 34).

Упражненія къ главѣ IV.

1. *Написать уравненіе плоскости, проходящей черезъ точки*

$$(1, -1, -2), (2, 1, 2), (-2, 0, -7).$$

Отв. $2x + y - z - 3 = 0$.

2. *Написать уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку* (1, 1, 1) *и ось* z.

Отв. $x - y = 0$.

3. *Найти точку пересѣченія плоскостей*

$$x + y - z - 1 = 0,$$
$$2x - 3y + z = 5,$$
$$x - 2y + 2z = 4.$$

Отв. (2, 0, 1).

4. *Найти точку пересѣченія плоскостей*

$$x + y + \lambda z = 1,$$
$$x + \lambda y + z = \lambda,$$
$$x - y + z = 3,$$

гдѣ λ *перемѣнный параметръ. Изслѣдовать случаи* $\lambda = \mp 1$.

Отв. $\left(4, \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}, \frac{-4}{\lambda + 1}\right)$ *при* λ *отличномъ отъ* ± 1.

5. *Написать уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку* (1, 2, 3) *и параллельной плоскости* $x - y + 2z - 1 = 0$.

Отв. $x - y + 2z - 5 = 0$.

6. *Опредѣлить уголъ между плоскостями*

$$x - 4y - 8z - 8 = 0 \text{ и } x + 2y - 2z + 1 = 0.$$

Отв. $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$.

7. *Опредѣлить разстояніе точки* (1, 2, — 2) *отъ плоскости*

$$x + 2y - 2z + 1 = 0.$$

Отв. $-3\frac{1}{3}$.

ГЛАВА V.

Прямая въ пространствѣ. Ея уравненія. Задачи на прямую и плоскость.

§ 43. Уравненія прямой въ пространствѣ. Прямую въ пространствѣ можно разсматривать, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей. Поэтому для аналитическаго ея опредѣленія нужно знать уравненія этихъ плоскостей.

Два уравненія

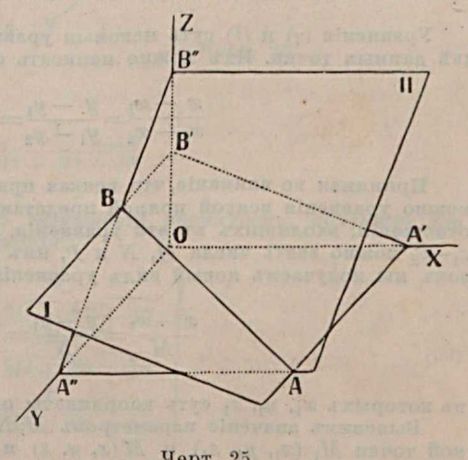
$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

разсматриваемыя совмѣстно, суть уравненія прямой линіи въ пространствѣ. Черезъ прямую можно провести безчисленное множество плоскостей и для опредѣленія ея можно брать произвольную пару изъ этихъ плоскостей. Аналитически это сводится къ преобразованію системы уравненій (α) въ систему, ей равносильную.

Исключивъ изъ уравненій (α) одинъ разъ x, а другой разъ y, мы получаемъ равносильную (α) систему уравненій вида

$$\left.\begin{aligned} x &= mz + a, \\ y &= nz + b. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Эти уравненія опредѣляютъ ту же прямую, что и уравненія (α). Первое изъ нихъ представляетъ плоскость, параллельную оси y и, слѣд., перпендикулярную къ плоскости xz, второе — плоскость, параллельную оси x и, слѣд., перпендикулярную къ плоскости yz. Эти плоскости называются плоскостями, *проектирующими* данную прямую соотвѣтственно на плоскости xz и yz. Первое изъ уравненій (26), разсматриваемое по отношенію къ плоскости xz, даетъ уравненіе прямой, которая служитъ *проекціей* данной прямой въ пространствѣ на плоскость xz. Второе представляетъ проекцію этой прямой на плоскость yz. (На черт. 25 данная прямая есть AB, плоскости I и II суть проектирующія плоскости, $A'B'$—проекція прямой на плоскость xz, а $A''B''$—ея проекція на плоскость yz).



Черт. 25.

Геометрическое значеніе четырехъ параметровъ, входящихъ въ уравненіе (26), легко выясняется при помощи § 27.

§ 44. Уравненія прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки. Новый видъ уравненій прямой. Пусть даны точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Требуется составить уравненіе прямой, проходящей черезъ эти точки.

Уравненія (26) представляютъ уравненія всякой прямой. Чтобы получить уравненія искомой прямой, нужно опредѣлить входящіе въ нихъ параметры m, n, a и b такъ, чтобы эти уравненія удовлетворялись координатами данныхъ точекъ, т.-е., чтобы

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned} x_1 &= mz_1 + a; \\ y_1 &= nz_1 + b; \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= mz_2 + a \\ y_2 &= nz_2 + b \end{aligned}\right\}(\beta)$$

Эти четыре уравненія опредѣляютъ четыре параметра m, n, a, b.

Но вмѣсто того, чтобы рѣшать уравненія (α) и (β) относительно параметровъ и затѣмъ найденныя значенія подставлять въ уравненія (26), можно изъ уравненій (26), (α) и (β) исключить эти параметры.

Вычитая изъ перваго изъ уравненій (26) первое изъ уравненій (α) и изъ перваго изъ уравненій (α) первое изъ уравненій (β), получимъ:

$$x - x_1 = m(z - z_1); \quad x_1 - x_2 = m(z_1 - z_2).$$

Почленное дѣленіе этихъ уравненій даетъ уравненіе:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma)$$

Поступая аналогично со вторыми уравненіями системъ (26), (α) и (β), получаемъ:

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\delta)$$

Уравненія (γ) и (δ) суть искомыя уравненія прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки. Ихъ можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\varepsilon)$$

Принимая во вниманіе, что всякая прямая проходитъ черезъ двѣ точки, можно уравненія всякой прямой представить въ видѣ (ε). Въ знаменателяхъ отношеній, входящихъ въ эти уравненія, вмѣсто разностей $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ можно взять числа M, N и P, имъ пропорціональныя; такимъ образомъ мы получаемъ новый видъ уравненій прямой:

$$\frac{x - x_1}{M} = \frac{y - y_1}{N} = \frac{z - z_1}{P}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (27)$$

въ которыхъ x_1, y_1, z_1 суть координаты одной изъ точекъ этой прямой.

Выяснимъ значеніе параметровъ M, N и P. Для этого возьмемъ на прямой точки M_1 (x_1, y_1, z_1) и $M(x, y, z)$ и проектируемъ отрѣзокъ M_1M на ось x (черт. 26). Проекція N_1N этого отрѣзка на ось x есть не что иное, какъ $x - x_1$. Съ другой стороны (§ 12)

$$N_1N = M_1M\cos\alpha,$$

гдѣ α есть уголъ прямой съ осью x. Слѣд.,

$$x - x_1 = M_1M\cos\alpha.$$

Точно также, обозначая черезъ β и γ углы прямой съ осями y и z, получимъ равенства:

$$y - y_1 = M_1M\cos\beta; \quad z - z_1 = M_1M\cos\gamma.$$

Изъ этихъ трехъ равенствъ слѣдуетъ, что

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

Сравнивая эти уравненія съ уравненіями (27), находимъ

$$\frac{cos\alpha}{M}=\frac{cos\beta}{N}=\frac{cos\gamma}{P} \quad . \; . \; . \; . \; (28)$$

т.-е., что *параметры M, N, P въ уравненіяхъ* (27) *суть числа, пропорціональныя косинусамъ угловъ, образуемыхъ прямой соотвѣтственно съ осями x, y и z.*

Для опредѣленія этихъ угловъ обозначимъ отношенія (28) черезъ t. Получимъ

$$cos\alpha = Mt;\; cos\beta = Nt;\; cos\gamma = Pt.$$

Возведя эти равенства въ квадратъ и сложивъ, найдемъ (§ 13):

$$t^2(M^2+N^2+P^2)=1,$$

Черт. 26.

откуда

$$t=\frac{1}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}$$

Подставивъ это значеніе t въ выраженія косинусовъ, получимъ для $cos\alpha$, $cos\beta$ и $cos\gamma$ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} cos\alpha&=\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}\\ cos\beta&=\frac{N}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}\\ cos\gamma&=\frac{P}{\sqrt{M^2+N^2+P^2}}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29)$$

§ 45. **Уголъ между двумя прямыми.** Пусть даны двѣ прямыя уравненіями:

$$\frac{x-a_1}{M_1}=\frac{y-b_1}{N_1}=\frac{z-c_1}{P_1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

$$\frac{x-a_2}{M_2}=\frac{y-b_2}{N_2}=\frac{z-c_2}{P_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta)$$

Обозначивъ уголъ между ними черезъ φ, на основаніи §§ 44 и 39, находимъ:

$$cos\,\varphi=\frac{M_1M_2+N_1N_2+P_1P_2}{\sqrt{M_1^2+N_1^2+P_1^2}\cdot\sqrt{M_2^2+N_2^2+P_2^2}}.$$

Прямыя (α) и (β) *параллельны*, если

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{N_1}{N_2}=\frac{P_1}{P_2}.$$

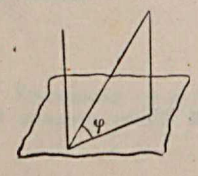
Прямыя (α) и (β) *перпендикулярны*, если

$$M_1M_2 + N_1N_2 + P_1P_2 = 0.$$

§ 46. **Уголъ между прямой и плоскостью.** Угломъ прямой и плоскости называется уголъ, составленный прямой съ ея проекціей на эту плоскость.

Легко убѣдиться (черт. 27), что этотъ уголъ φ служитъ дополненіемъ до $\frac{\pi}{2}$ угла, образуемаго прямой съ перпендикуляромъ къ плоскости.

Поэтому, зная послѣдній, мы будемъ знать и искомый.



Черт. 27.

Если уравненія данной прямой и данной плоскости суть

$$\frac{x-a}{M} = \frac{y-b}{N} = \frac{z-c}{P}, \quad \ldots \ldots \ldots (\alpha)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \ldots \ldots \ldots (\beta)$$

то косинусъ угла прямой (α) съ перпендикуляромъ къ плоскости (β), т.-е. косинусъ угла $\frac{\pi}{2} - \varphi$, равный $\sin\varphi$, выразится формулой (§§ 44, 36, 39):

$$\sin\varphi = \frac{AM + BN + CP}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{M^2 + N^2 + P^2}}.$$

Эта формула рѣшаетъ вопросъ объ углѣ прямой съ плоскостью.

Если прямая (α) и плоскость (β) параллельны, то $\varphi = 0$ и, слѣд.,

$$AM + BN + CP = 0.$$

Если прямая (α) и плоскость (β) перпендикулярны, то (§§ 36, 45)

$$\frac{M}{A} = \frac{N}{B} = \frac{P}{C}.$$

§ 47. **Пересѣченіе прямой и плоскости.** Пусть даны прямая и плоскость уравненіями (α) и (β) (см. § 46). Требуется найти точку ихъ пересѣченія.

Такъ какъ координаты точки пересѣченія должны удовлетворять и уравненіямъ (α), и уравненію (β), то задача сводится къ рѣшенію системы трехъ уравненій (α) и (β). Вычисленія можно расположить такъ: обозначивъ каждое изъ отношеній (α) черезъ t, найдемъ:

$$x = a + Mt;\ y = b + Nt;\ z = c + Pt.$$

Подстановка этихъ выраженій x, y и z въ уравненіе (β) приводитъ къ уравненію:

$$(AM + BN + CP)t + Aa + Bb + Cc + D = 0,$$

изъ котораго находимъ t:

$$t = -\frac{Aa + Bb + Cc + D}{AM + BN + CP}.$$

Подставляя найденное значеніе t въ выраженія для x, y и z, получимъ:

$$x = a - \frac{(Aa + Bb + Cc + D)M}{AM + BN + CP},$$
$$y = b - \frac{(Aa + Bb + Cc + D)N}{AM + BN + CP},$$
$$z = c - \frac{(Aa + Bb + Cc + D)P}{AM + BN + CP}.$$

Если $AM + BN + CP = 0$, но $Aa + Bb + Cc + D \neq 0$, то эти формулы даютъ для координатъ точки пересѣченія *безконечныя* значенія. Это значитъ, что прямая (α) и плоскость (β) параллельны (ср. § 46).

Если $AM + BN + CP = 0$ и $Aa + Bb + Cc + D = 0$, то для x, y, z получаются *неопредѣленныя* выраженія. Чтобы выяснить геометрическій смыслъ этихъ неопредѣленныхъ выраженій, достаточно замѣтить, что первое изъ указанныхъ условій есть условіе параллельности прямой и плоскости, а второе показываетъ, что плоскость (β) проходитъ черезъ точку (a, b, c), лежащую на прямой. Прямая въ этомъ случаѣ лежитъ въ плоскости, и за точку пересѣченія ея съ плоскостью можно взять произвольную точку ея.

§ 48. **Пересѣченіе двухъ прямыхъ въ пространствѣ.** Для опредѣленія точки пересѣченія двухъ прямыхъ, данныхъ уравненіями

$$x = mz + a, \quad y = nz + b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$
$$x = m_1 z + a_1, \quad y = n_1 z + b_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

нужно найти такія значенія *трехъ* неизвѣстныхъ x, y и z, которыя удовлетворяли бы *четыремъ* уравненіямъ (α) и (β). Это, какъ извѣстно изъ алгебры, возможно лишь въ томъ случаѣ, когда между параметрами уравненій (α) и (β) существуетъ нѣкоторое соотношеніе. Выведемъ это соотношеніе. Черезъ вычитаніе перваго уравненія (β) изъ перваго уравненія (α) и второго уравненія (β) изъ второго уравненія (α) находимъ

$$(m - m_1)z + a - a_1 = 0,$$
$$(n - n_1)z + b - b_1 = 0.$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій z, получимъ искомое условіе:

$$(a - a_1)(n - n_1) = (b - b_1)(m - m_1).$$

Итакъ, если это условіе выполняется, то прямыя (α) и (β) пересѣкаются; если же оно не выполняется, то онѣ не пересѣкаются.

Упражненія къ главѣ V.

1. *Прямая опредѣляется уравненіями*

$$x + 2y - z + 1 = 0, \quad 3x - 2y + 5z - 5 = 0;$$

написать уравненія плоскостей, проектирующихъ эту прямую на плоскости координатъ.

Отв. $x = -z + 1$; $y = z - 1$; $x + y = 0$.

2. *Показать, что углы* α, β *и* γ *прямой* (26) *съ осями координатъ опредѣляются уравненіями.*

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}, \quad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}.$$

3. *Показать, что прямая*

$$x-1=2(y-1)=-2(z+1)$$

лежитъ на плоскости

$$2x-y+3z+2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

4. *Найти точку пересѣченія плоскости* (α) *предыдущей задачи съ прямой*

$$6(x-1)=3(y-1)=2(z+1).$$

Отв. (1, 1,—1).

5. *Найти точку пересѣченія прямыхъ*

$$x-1=2(y-1)=-2(z+1),$$
$$2(x+2)=-3(y-3)=3(z+3).$$

Отв. (1, 1,—1).

6. *Можно ли провести плоскость черезъ прямыя*

$$x-1=2(y-1)=-2(z+1)$$
$$2(x-1)=3(y+1)=z?$$

Отв. Нельзя.

7. *Показать, что уравненіе*

$$x+\lambda y-(m+\lambda n)z-(a+\lambda b)=0,$$

гдѣ λ *есть перемѣнный параметръ, а* m, n, a *и* b *суть постоянныя, есть уравненіе пучка плоскостей, проходящихъ черезъ прямую*

$$x=mz+a, \quad y=nz+b.$$

8. *Найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку* (1, 2, 3) *и прямую*

$$x=2z-1; \quad y=3z-2.$$

Отв. $5x-4y+2z-3=0$.

9. *Найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ прямыя* (β) и (γ):

$$x-1=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

$$x+1=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Отв. $4x+7y-6z+3=0$.

ГЛАВА VI.

Кругъ. Парабола. Эллипсъ. Гипербола.

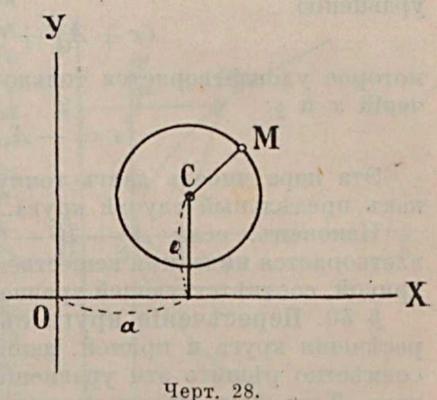
Содержаніе главы. Въ настоящей главѣ даются примѣры составленія уравненій кривыхъ, разсматриваемыхъ, какъ геометрическія мѣста точекъ, обладающихъ извѣстнымъ свойствомъ (§ 18), и изученія кривыхъ по ихъ уравненіямъ.

§ 49. **Кругъ и его уравненіе.** *Кругъ есть плоская кривая, всѣ точки которой равно удалены отъ одной точки, называемой его центромъ. Разстояніе точки круга отъ центра называется радіусомъ.*

Чтобы получить уравненіе круга, выразимъ алгебраически его опредѣленіе. Пусть центръ круга есть точка $C(a, b)$ (черт. 28), и радіусъ его равенъ r. Если $M(x, y)$ есть одна изъ точекъ круга, то по опредѣленію $CM = r$. Вычисляя разстояніе CM между точк. $C(a, b)$ и $M(x, y)$, находимъ (§ 3, форм. 1):

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

откуда, по возведеніи обѣихъ частей уравненія въ квадратъ, получимъ:



Черт. 28.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

Это уравненіе, какъ связывающее координаты произвольной точки круга, есть *уравненіе круга.*

Уравненіе круга есть уравненіе *второй степени* относительно текущихъ координатъ.

Уравненіе круга, центръ котораго находится въ началѣ координатъ, таково:

$$x^2+y^2=r^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

Легко видѣть, что уравненіе (30) есть частный случай уравненія

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

въ которомъ A, B и C суть постоянныя.

Это уравненіе легко привести къ виду (30). Дѣйствительно,

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=(x^2+2Ax+A^2)+(y^2+2Bx+B^2)-$$
$$-(A^2+B^2-C)=(x+A)^2+(y+B)^2-(A^2+B^2-C).$$

Поэтому ур-іе (32) приводится къ уравненію

$$(x+A)^2+(y+B)^2=A^2+B^2-C \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Если $A^2+B^2-C>0$, то, положивъ $A^2+B^2-C=R^2$, получимъ

$$(x+A)^2+(y+B)^2=R^2.$$

Это — уравненіе круга съ центромъ въ точкѣ $(-A, -B)$ и радіусомъ R.

Если $A^2+B^2-C=0$, то уравненіе (32) приводится къ уравненію

$$(x+A)^2+(y+B)^2=0,$$

которое удовлетворяется только *одной* парой вещественныхъ значеній x и y:

$$x=-A,\ y=-B.$$

Эта пара чиселъ даетъ точку, которую можно разсматривать, какъ предѣльный случай круга.

Наконецъ, если $A^2+B^2-C<0$, то уравненіе (α) не удовлетворяется никакими вещественными значеніями x и y. Поэтому кривой, соотвѣтствующей уравненію (α), въ этомъ случаѣ нѣтъ *).

§ 50. **Пересѣченіе круга съ прямой.** Чтобы найти точки пересѣченія круга и прямой, данныхъ своими уравненіями, нужно совмѣстно рѣшить эти уравненія относительно текущихъ координатъ. Такъ какъ уравненіе круга есть уравненіе *второй* степени, а уравненіе прямой—первой степени, то получимъ два рѣшенія (x_1, y_1) и (x_2, y_2), которыя опредѣлятъ двѣ точки пересѣченія. Если эти два рѣшенія вещественны и различны, то прямая *пересѣкаетъ* кругъ въ двухъ точкахъ; если эти два рѣшенія вещественны и одинаковы, то прямая имѣетъ съ кругомъ одну общую точку и представляетъ *касательную* къ нему; если, наконецъ, рѣшенія мнимы, то прямая *не пересѣкаетъ* круга.

Упражненія. *Написать уравненіе круга съ центромъ въ точкѣ* (—2, 0) *и радіусомъ* 1.

Отв. $(x+2)^2+y^2-1=0$.

2. *Показать, что уравненіе*

$$4x^2+4y^2-8x+12y-3=0,$$

---

*) Въ этомъ случаѣ уравненіе (α) называютъ также уравненіемъ *мнимаго круга*.

есть уравненіе круга, и найти его центръ и радіусъ.

Отв. $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$; 2.

3. *Найти точки пересѣченія круга*

$$x^2 + (y+2)^2 = 25$$

съ прямыми

a) $y = -x + 3$; b) $3x + 4y - 17 = 0$; c) $3x - 4y - 24 = 0$.

Отв. a) (0, 3) и (5,—2); b) (3, 2); c) *нѣтъ.*

§ 51. Парабола. Ея уравненіе. *Параболой называется геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ данной точки, называемой фокусомъ параболы, и данной прямой, называемой ея директрисой.*

Пусть F есть данная точка *(фокусъ)* и $D'D$ — данная прямая *(директриса)* (черт. 29). Опустимъ изъ точки F перпендикуляръ FQ на прямую $D'D$ и примемъ его за ось абсциссъ; за ось ординатъ возьмемъ прямую, перпендикулярную къ оси абсциссъ и проходящую черезъ средину O отрѣзка QF. Длину отрѣзка QF обозначимъ черезъ p.

Для вывода уравненія параболы предположимъ, что точка $M(x, y)$ лежитъ на ней, и выразимъ алгебраически равенство разстояній FM и NM этой точки соотвѣтственно отъ фокуса и директрисы.

Черт. 29.

Такъ какъ координаты точки F суть $\frac{p}{2}$ и 0, то (фор. 1)

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2};$$

вычислимъ разстояніе NM:

$$NM = NP + PM = QO + PM;$$

но $QO = \frac{p}{2}$; $PM = x$; слѣд., $NM = \frac{p}{2} + x$.

По опредѣленію параболы имѣемъ уравненіе

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x;$$

возведя обѣ части его въ квадратъ и сдѣлавъ упрощенія, получимъ:

$$y^2=2px; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

это—искомое уравненіе параболы. Оно, какъ и уравненіе круга, второй степени.

§ 52. **Форма параболы.** Изъ уравненія (33) видно, что $y=0$ при $x=0$, т.-е. парабола (33) проходитъ черезъ начало координатъ.

Такъ какъ лѣвая часть уравненія (33) есть величина положительная, то и вторая часть его должна быть положительной. Для этого нужно, чтобъ p и x были *одного* знака. Поэтому, если $p>0$, то $x>0$; если же $p<0$, то $x<0$. Въ первомъ случаѣ парабола всѣми своими точками лежитъ въ области положительныхъ абсциссъ, а во второмъ — въ области отрицательныхъ. Пусть $p>0$. Для каждаго положительнаго значенія x изъ уравненія (33) имѣемъ:

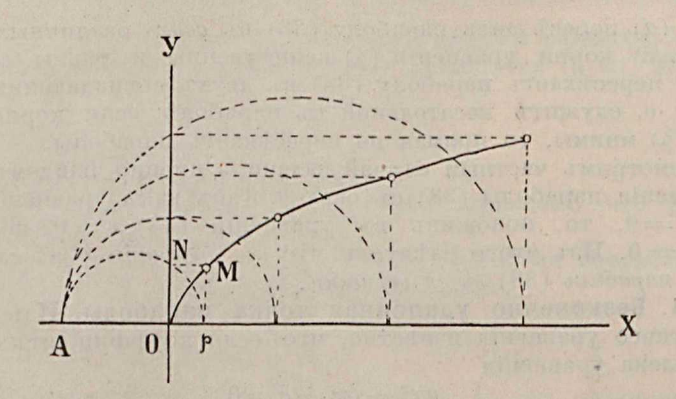
$$y=\pm\sqrt{2px};$$

отсюда заключаемъ, что каждому положительному значенію x соотвѣтствуютъ *два* значенія y, равныя по величинѣ и противоположныя по знаку. Поэтому парабола (33) *симметрична* относительно оси абсциссъ.

Ось абсциссъ называется *осью* параболы, а точка ея пересѣченія съ осью, т.-е. начало координатъ, носитъ названіе *вершины* параболы.

При безграничномъ возрастаніи x соотвѣтственныя значенія y также безгранично возрастаютъ (по абсолютной величинѣ). Поэтому парабола есть кривая, простирающаяся въ безконечность, или кривая незамкнутая.

Уравненіе (33) показываетъ, что ордината y всякой точки параболы есть *средняя пропорціональная* между ея абсциссою и постояннымъ отрѣзкомъ $2p$. Этимъ свойствомъ ординатъ точекъ параболы можно воспользоваться для построенія произвольнаго числа ея точекъ. Отложимъ на оси x въ сторону отрицательныхъ абсциссъ отрѣзокъ $OA=2p$ (черт. 30) и будемъ описывать окружности, имѣющія центры на оси x и проходящія черезъ точку A. Положимъ, что одна изъ нихъ пересѣкаетъ ось x въ



Черт. 30.

точкѣ P и ось y въ точкѣ N. Проведемъ черезъ P прямую, параллельную оси y, а черезъ N прямую, параллельную оси x. Пересѣченіе M этихъ прямыхъ есть точка параболы (33). Дѣйствительно, по извѣстной теоремѣ имѣемъ:

$$ON^2 = OA \,.\, OP \text{ или } PM^2 = OA \,.\, OP.$$

OP и PM суть координаты точки M. Называя ихъ соотвѣтственно черезъ x и y и принимая во вниманіе, что $AO = 2p$, получимъ:

$$y^2 = 2px,$$

что и показываетъ, что точка M лежитъ на параболѣ (33).

§ 53. **Пересѣченіе параболы съ прямой.** Для того, чтобы найти точки пересѣченія параболы (33) съ прямой, данной уравненіемъ

$$y = kx + b, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

нужно рѣшить систему уравненій (33) и (α). Подставляя значеніе y изъ уравненія (α) въ уравненіе (33) находимъ:

$$k^2x^2 + 2(k - p)x + b^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Обозначивъ черезъ x_1 и x_2 корни этого квадратнаго уравненія и вычисливъ при помощи уравненія (α) соотвѣтственныя значенія y_1 и y_2 неизвѣстнаго y, получаемъ два рѣшенія системы уравненій (33) и (α): (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Эти два рѣшенія даютъ *двѣ* точки пересѣченія параболы съ прямой. Если корни уравненія (β) вещественны и различны, то

прямая (α) пересѣкаетъ параболу (33) въ *двухъ* различныхъ точкахъ; если корни уравненія (β) вещественны и равны, то прямая (α) пересѣкаетъ параболу (33) въ двухъ совпадающихъ точкахъ, т.-е. служитъ касательной къ параболѣ; если корни уравненія (β) мнимы, то прямая не пересѣкаетъ параболы.

Разсмотримъ частный случай задачи, а именно найдемъ точки пересѣченія параболы (33) съ осью y. Такъ какъ уравненіе оси y есть $x=0$, то, положивъ въ уравненіи (33) $x=0$, получимъ $y_1=y_2=0$. Изъ этого слѣдуетъ, что *ось ординатъ есть касательная къ параболѣ* (33) *въ ея вершинѣ*.

§ 54. **Безконечно удаленная точка параболы.** Изъ теоріи квадратнаго уравненія извѣстно, что если коэффиціентъ a старшаго члена уравненія

$$ax^2+bx+c=0$$

обращается въ *нуль*, то одинъ изъ корней его становится безконечно большимъ.

Въ уравненіи (β) § 53 коэффиціентъ старшаго члена обращается въ нуль при $k=0$. Слѣд., при $k=0$ одинъ изъ его корней обращается въ безконечность. Поэтому одна изъ точекъ пересѣченія параболы (33) съ прямыми, угловой коэффиціентъ которыхъ равенъ *нулю*, есть безконечно удаленная точка. Прямыя, для которыхъ угловой коэффиціентъ k равенъ *нулю*, параллельны оси x (§ 28) и параллельны между собою. Всѣ параллельныя прямыя пересѣкаются въ *одной* безконечно удаленной точкѣ. Слѣд., *на параболѣ существуетъ одна безконечно удаленная точка*.

Упражненія. 1. *Написать уравненіе параболы, вершина которой находится въ началѣ координатъ и ось направлена по оси* y.

Отв. $x^2=2py$.

2. *Написать уравненіе параболы, проходящей черезъ точку* (1, 2), *если извѣстно, что вершина ея лежитъ въ началѣ координатъ и ось совпадаетъ съ осью* x.

Отв. $y^2=4x$.

3. *Найти точки пересѣченія параболы* $y^2=4x$ *съ прямыми*

a) $2x-3y+4=0$; b) $x-y+1=0$; c) $2x-y+1=0$; d) $y+1=0$.

Отв. a) (1, 2) и (4, 4); b) (1, 2); c) *нѣтъ*. d) $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$ *и безк. удал. т.*

4. *Найти точки пересѣченія параболъ*

$$y^2=4x \text{ и } x^2=4y.$$

Отв. (0, 0) и (4, 4).

5. *Найти точки пересѣченія кривыхъ*

$$y^2=\frac{16}{3}x \text{ и } x^2+y^2=25.$$

Отв. (3, 4) и (3, —4).

§ 55. Цѣлая раціональная функція второй степени. Цѣлой раціональной функціей 2-ой степени называется (§ 22) функція

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

гдѣ a, b, c суть постоянныя.

Разсмотримъ свойства этой функціи и покажемъ, что графикомъ ея служитъ парабола.

Давая перемѣнному x приращеніе Δx и обозначая соотвѣтственное приращеніе функціи черезъ Δy, находимъ:

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c. \quad \ldots\ldots (\beta)$$

Черезъ почленное вычитаніе уравненія (α) изъ уравненія (β), получимъ

$$\Delta y = 2ax\Delta x + b\Delta x + a(\Delta x)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Это равенство показываетъ, что приращеніе Δy функціи y зависитъ не только отъ приращенія Δx перемѣннаго x, но и отъ значенія этого перемѣннаго. *Равнымъ* приращеніямъ перемѣннаго x соотвѣтствуютъ, вообще, *неравныя* приращенія функціи, т.-е. *функція измѣняется неравномѣрно.*

Наприм., функція $x^2 + x + 1$ при $x = 0$, 1, 2 имѣетъ соотвѣтственно значенія 1, 3, 7; приращеніе ея при переходѣ отъ $x = 0$ къ $x = 1$ равно 2, а при переходѣ отъ $x = 1$ къ $x = 2$ приращеніе равно 4. Приращенія перемѣннаго въ томъ и другомъ случаѣ одинаковы ($\Delta x = 1$), а соотвѣтственныя приращенія функціи различны ($\Delta y = 2$ въ первомъ случаѣ и $\Delta y = 4$ — во второмъ).

Изъ уравненія (γ) можно вывести еще заключеніе о *непрерывности* разсматриваемой функціи (§ 16). Для этого нужно показать, что надлежащимъ выборомъ $|\Delta x|$ можно сдѣлать $|\Delta y|$ меньше произвольнаго числа ε.

Такъ какъ абсолютное значеніе суммы не болѣе суммы абсолютныхъ значеній слагаемыхъ, то по уравненію (γ) имѣемъ:

$$|\Delta y| \leqslant |2ax\Delta x| + |b\Delta x| + |a(\Delta x)^2| \quad \ldots\ldots (\delta)$$

При разсмотрѣніи вопроса о непрерывности мы имѣемъ дѣло съ *малыми* измѣненіями перемѣннаго; поэтому можно положить $|\Delta x| < 1$ и, слѣд., $(\Delta x)^2 < |\Delta x|$. Неравенство ($\delta$) усилится, если вмѣсто $(\Delta x)^2$ подставимъ $|\Delta x|$. Слѣд.,

$$|\Delta y| < \{|2ax| + |b| + |a|\} \cdot |\Delta x|.$$

Если черезъ M обозначимъ *наибольшее* изъ трехъ чиселъ $|2ax|$, $|b|$ и $|a|$, то предыдущее неравенство удовлетворится при существованіи неравенства

$$|\Delta y| < 3M.|\Delta x|.$$

Отсюда ясно, что $|\Delta y| < \varepsilon$, если возьмемъ $|\Delta x| < \varepsilon/3M$.

Приведенныя разсужденія не зависятъ отъ выбора начальнаго значенія x. Слѣд., *функція* (α) *непрерывна при всѣхъ значеніяхъ* x.

Прослѣдимъ теперь измѣненіе функціи (α) при измѣненіи перемѣннаго x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Функцію y нетрудно привести къ слѣдующему виду:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

Разность $4ac - b^2$ называется *дискриминантомъ* функціи (α). Дискриминантъ можетъ быть *положительнымъ, равнымъ нулю* и *отрицательнымъ*. Разсмотримъ эти три случая отдѣльно.

1-й случай: $4ac - b^2 > 0$. Въ этомъ случаѣ второй множитель второй части *положителенъ* при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго x и имѣетъ *наименьшую* величину при $x = -b/2a$. Знакъ функціи совпадаетъ съ знакомъ a. При измѣненіи x отъ $-\infty$ до $-b/2a$ функція *убываетъ*, если $a > 0$, и *возрастаетъ*, если $a < 0$. При $x = -b/2a$ она достигаетъ *наименьшаго* значенія, если $a > 0$, и *наибольшаго*, если $a < 0$; при измѣненіи x отъ $-b/2a$ до $+\infty$ функція *возрастаетъ* въ первомъ случаѣ и *убываетъ* во второмъ.

При измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$ функція *не обращается въ нуль* и *не мѣняетъ знака*.

2-й случай: $4ac - b^2 = 0$. Въ этомъ случаѣ формула (ε) даетъ:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Изъ разсмотрѣнія этого уравненія можно сдѣлать слѣдующія заключенія:

1) *Знакъ значенія функціи всегда одинаковъ со знакомъ коэффиціента a;*

2) *при $a > 0$ значенія функціи убываютъ отъ $+\infty$ до 0 при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $-b/2a$ и возрастаютъ отъ 0 до $+\infty$ при измѣненіи x отъ $-b/2a$ до ∞;*

3) *при $a < 0$ значенія функціи возрастаютъ отъ $-\infty$ до 0 при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $-b/2a$ и убываютъ отъ 0 до $-\infty$ при измѣненіи x отъ $-b/2a$ до $+\infty$;*

4) *при измѣненіи* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$ *функція одинъ разъ обращается въ нуль, не мѣняя при этомъ своего знака.*

3-й случай: $4ac - b^2 < 0$. Въ этомъ случаѣ уравненіе (ε) можно преобразовать такъ:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[x - \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right].$$

Отсюда, положивъ

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

находимъ

$$y = a(x - x_1)(x - x_2); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\zeta)$$

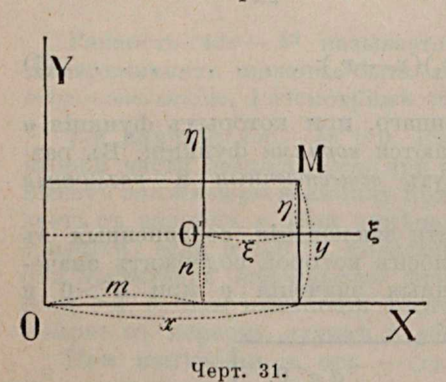
x_1 и x_2 суть тѣ значенія перемѣннаго, при которыхъ функція y обращается въ *нуль;* они называются *корнями* функціи. Въ разсматриваемомъ случаѣ корни суть *вещественныя* и *различныя* числа; пусть $x_1 < x_2$.

Изъ формулы (ζ) легко вывести заключенія, соединенныя въ слѣдующей таблицѣ, средній столбецъ которой содержитъ значенія x, а крайніе — соотвѣтственныя значенія y при $a > 0$ и при $a < 0$.

$a > 0$.		$a < 0$.
Значенія y.	*Значенія* x.	*Значенія* y.
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$y > 0$	$x < x_1$	$y < 0$
$y = 0$	$x = x_1$	$y = 0$
$y < 0$	$x_1 < x < x_2$	$y > 0$
$y = 0$	$x = x_2$	$y = 0$
$y > 0$	$x > x_2$	$y < 0$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Содержаніе этой таблицы можно резюмировать слѣдующимъ образомъ: при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $-b/2a$ (см. случ. 1-й) y есть функція *убывающая*, если $a>0$, и *возрастающая*, если $a<0$; при измѣненіи x отъ $-b/2a$ y есть функція *возрастающая* въ первомъ случаѣ и *убывающая* во второмъ; въ томъ и другомъ случаѣ функція *дважды* обращается въ *нуль*, мѣняя при этомъ свой знакъ. Кромѣ того изъ формулы (ε) видно, что наименьшее при $a>0$ и наибольшее при $a<0$ значеніе функціи равно $(4ac-b^2)/4a$.

Для построенія графика функціи (α) x и y принимаемъ за прямоугольныя координаты точки на плоскости. Возьмемъ на плоскости xy точку O', абсцисса которой равна $-b/2a$, а ордината $(4ac-b^2)/4a$, проведемъ черезъ нея прямыя $O'\xi$ и $O'\eta$, соотвѣтственно параллельныя осямъ Ox и Oy. Прямыя $O'\xi$ и $O'\eta$ примемъ за новыя оси прямоугольной системы координатъ, а координаты точки относительно этой новой системы будемъ обозначать черезъ ξ и η. Если координаты точки M относительно системы xOy суть x и y, а относительно системы $\xi O'\eta$ суть ξ и η, то изъ черт. 31 легко убѣдиться, что между старыми и новыми координатами существуютъ соотношенія



Черт. 31.

$$x=\xi+m,\quad y=\eta+n,$$

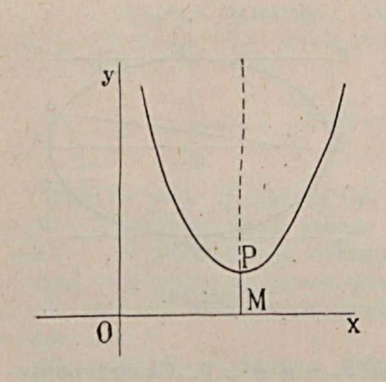
гдѣ m и n суть координаты новаго начала O' относительно системы xOy. Въ разсматриваемомъ случаѣ

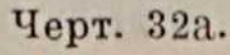
$$m=-\frac{b}{2a},\ n=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

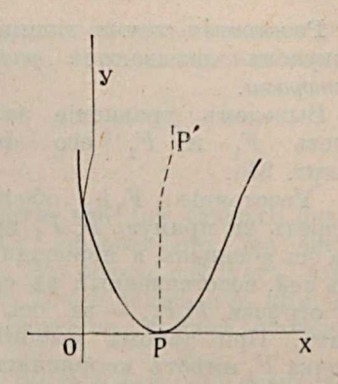
Подставляя выраженія x и y черезъ ξ и η въ формулу (ε), получимъ послѣ нѣкоторыхъ упрощеній уравненіе:

$$\eta=a\xi^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\eta)$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (33), находимъ, что это есть уравненіе параболы съ вершиной въ точкѣ O' и осью, совпадающей съ положительнымъ направленіемъ оси η при $a>0$ и съ отрицательнымъ ея направленіемъ при $a<0$.




Черт. 32a.

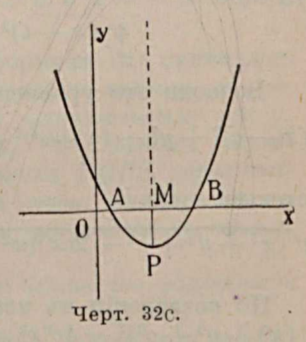


Черт. 32b.

При возвращеніи къ первоначальной системѣ xOy координатъ уравненіе (γ_1) переходитъ въ уравненіе (α). Поэтому уравненіе (α) есть уравненіе параболы, ось которой параллельна оси y, а вершина находится въ точкѣ $O'[-b/2a, (4ac-b^2)/4a]$.

Итакъ, графикъ функціи (α) есть парабола.

При *положительномъ* дискриминантѣ парабола *не пересѣкаетъ оси* x; при дискриминантѣ, *равномъ нулю*, она *касается* оси x въ точкѣ, абсцисса которой $= -b/2a$; при *отрицательномъ* дискриминантѣ парабола *пересѣкаетъ* ось x въ двухъ точкахъ, абсциссы которыхъ суть x_1 и x_2. (См. черт. 32).



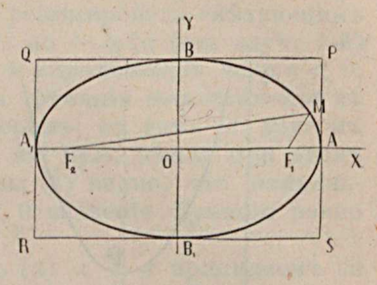
Черт. 32c.

Упражненіе. *Построить графики слѣдующихъ функцій:*

$$y = x^2 + 2x + 2;$$
$$y = -x^2 + 2x - 1.$$
$$y = x^2 + 3x + 2.$$
$$y = 4 - x^2.$$

§ 56. **Эллипсъ. Его уравненіе.** *Эллипсомъ называется геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ, называемыхъ фокусами, есть величина постоянная.*

Разстоянія точки эллипса отъ фокусовъ называются *радіусами векторами*.



Черт. 33.

Выведемъ уравненіе эллипса. Пусть F_1 и F_2 его фокусы (черт. 33).

Разстояніе F_1F_2 обозначимъ черезъ $2c$, прямую F_2F_1 примемъ за ось абсциссъ, а перпендикуляръ къ ней, возставленный въ срединѣ O отрѣзка F_2F_1, — за ось ординатъ. При такомъ выборѣ осей точка F_1 имѣетъ координаты $x = c$ и $y = 0$, а точка F_2 координаты $x = -c$ и $y = 0$. Сумму радіусовъ векторовъ точки эллипса обозначимъ черезъ $2a$. Если $M(x, y)$ есть одна изъ точекъ эллипса, то, по опредѣленію, $F_1M + F_2M = 2a$. Такъ какъ (форм. 1)

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},\ F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

то

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Возводя это уравненіе въ квадратъ, получаемъ

$$(x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2 + y^2]} = 4a^2;$$

отсюда

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2)$$

По возведеніи въ квадратъ это уравненіе даетъ уравненіе

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = 4a^4 + (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2),$$

которое послѣ нѣкоторыхъ преобразованій приводится къ слѣдующему:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Такъ какъ $F_1M + F_2M > F_2F_1$, то $a > c$. Поэтому $a^2 - c^2$ есть величина *положительная*. Полагая $a^2 - c^2 = b^2$ и раздѣливъ предыдущее уравненіе на a^2b^2, получимъ искомое уравненіе эллипса въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

§ 57. **Форма эллипса.** Для изслѣдованія формы эллипса рѣшимъ уравненіе (34) какъ относительно x, такъ и относительно y. Получимъ:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \quad . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

Первая изъ формулъ (α) показываетъ, что для каждаго значенія x, заключеннаго между $-a$ и $+a$, существуютъ два значенія y, отличающіяся только знаками. Изъ этого слѣдуетъ, что кривая *симметрична относительно оси* x. Точно также изъ второй формулы (α) обнаруживается *симметричность* кривой *относительно оси* y.

При $x = \pm a$ первая формула (α) даетъ $y = 0$; это значитъ, что кривая пересѣкаетъ ось x въ двухъ точкахъ $A(a, 0)$ и $A_1(-a, 0)$.

При $y = \pm b$ вторая формула (α) даетъ $x = 0$; это значитъ, что кривая пересѣкаетъ ось y въ двухъ точкахъ: $B(0, b)$ и $B_1(0, -b)$.

Если $|x| > a$, то первая формула (α) даетъ для *y мнимыя* значенія; слѣдовательно, *эллипсъ* (34) *всѣми своими точками лежитъ въ полосѣ, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = -a$, параллельными оси y.*

Подобнымъ же образомъ вторая изъ формулъ (α) приводитъ къ заключенію, что *эллипсъ всѣми своими точками лежитъ въ полосѣ, ограниченной прямыми $y = b$ и $y = -b$, параллельными оси y.*

Соединяя эти два вывода, заключаемъ, что *эллипсъ всѣми своими точками лежитъ внутри прямоугольника $PQRS$, образованнаго прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$; стороны этого прямоугольника равны $2a$ и $2b$, и пересѣченіе его діагоналей находится въ началѣ координатъ.*

Отсюда слѣдуетъ, что *эллипсъ не имѣетъ безконечно удаленныхъ точекъ.*

Чтобы составить понятіе о формѣ эллипса, достаточно, вслѣдствіе его симметріи относительно осей координатъ, прослѣдить измѣненіе его положительной ординаты при измѣненіи абсциссы отъ 0 до $+a$.

Изъ первой формулы (α) видно, что при $x = 0$, $y = b$; при возрастаніи x отъ 0 до a положительная ордината эллипса *убываетъ* и при $x = a$ обращается въ нуль. Кривая имѣетъ форму, изображенную на черт. (33).

§ 58. **Оси и вершины эллипса.** Отрѣзки $A_1A = 2a$ и $B_1B = 2b$ называются *осями* эллипса (34), а отрѣзки $OA = a$ и $OB = b$ — его *полуосями.*

Сравненіе величины осей и полуосей приводитъ къ названіямъ: *большая* и *малая* ось или полуось.

Точки A, A_1, B и B_1 называются *вершинами* эллипса.

Фокусы эллипса лежатъ на большой оси (§ 56).

Если $a=b$, то уравненіе (34) приводится къ уравненію (31) круга съ центромъ въ O и радіусомъ a.

§ 59. **Связь эллипса съ кругомъ.** Возьмемъ эллипсъ (34) и кругъ

$$x^2+y^2=a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

съ центромъ въ началѣ координатъ и радіусомъ, равнымъ большой полуоси эллипса (34).

Опредѣляя изъ уравненій (34) и (α) ординаты эллипса и круга для одной и той же абсциссы и обозначая ихъ соотвѣтственно черезъ y и Y, находимъ:

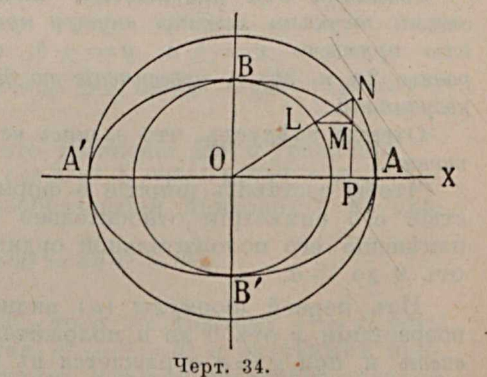
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ Y=\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

Сравненіе y и Y приводитъ къ уравненію

$$y=\frac{b}{a}Y, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

которое показываетъ, что *для одной и той же абсциссы ордината эллипса равна ординатѣ круга, уменьшенной въ отношеніи* b/a.

Эта связь ординатъ эллипса и круга даетъ возможность построить сколько угодно точекъ эллипса по его осямъ.



Черт. 34.

Возьмемъ два концентрическихъ круга съ центромъ въ началѣ координатъ и радіусами a и b и какую-нибудь точку N на первомъ изъ нихъ (черт. 34). Построивъ ея ординату PN и соединивъ N съ центромъ O, проведемъ черезъ точку L пересѣченія прямой ON со вторымъ кругомъ прямую, параллельную оси x. Точка M пересѣченія этой прямой съ ординатой PN есть

точка эллипса (34). Дѣйствительно, по параллельности прямыхъ LM и OP имѣемъ

$$\frac{PM}{PN}=\frac{OL}{ON};$$

отсюда, принявъ во вниманіе, что $OL=b$, $ON=a$, $PN=Y$, находимъ

$$PM=\frac{b}{a}Y.$$

Сравнивая это равенство съ равенствомъ (β), получимъ: $PM=y$, т.-е. PM есть ордината точки эллипса, имѣющей абсциссу OP. Очевидно, что такимъ образомъ можно построить сколько угодно точекъ эллипса.

§ 60. **Пересѣченіе эллипса съ прямой.** Даны эллипсъ уравненіемъ (34) и прямая уравненіемъ

$$y=kx+f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Требуется найти точки ихъ пересѣченія.

Подстановка значенія y изъ уравненія (α) въ уравненіе (34) даетъ для опредѣленія абсциссъ точекъ пересѣченія квадратное уравненіе:

$$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kfx+a^2(f^2-b^2)=0 \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

Корни этого уравненія обозначимъ черезъ x_1 и x_2, а соотвѣтственныя значенія y, опредѣляемыя изъ уравненія (α), черезъ y_1 и y_2.

Если корни уравненія (β) *дѣйствительны* и *различны*, то прямая (α) пересѣкаетъ эллипсъ (34) въ *двухъ различныхъ* точкахъ: (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Если корни уравненія (β) *дѣйствительны* и *равны*, то прямая пересѣкаетъ эллипсъ въ *двухъ совпадающихъ* точкахъ и служитъ къ нему *касательной*.

Если корни уравненія (β) *мнимы*, то прямая не пересѣкаетъ эллипса.

Коэффиціентъ $a^2k^2+b^2$ старшаго члена уравненія (β) не можетъ обратиться въ нуль при дѣйствительныхъ значеніяхъ k. Поэтому уравненіе (β) не имѣетъ безконечныхъ корней и, слѣд., *эллипсъ не имѣетъ безконечно удаленныхъ точекъ* (ср. §§ 57 и 54).

Упражненіе. *Показать, что стороны прямоугольника, указаннаго въ* § 57, *служатъ касательными къ эллипсу.*

§ 61. **Центръ эллипса.** Разсмотримъ частный случай задачи предыдущаго §, а именно, будемъ искать точки пересѣченія эллипса (34) съ прямыми, проходящими черезъ начало координатъ.

Уравненіе одной изъ такихъ прямыхъ есть

$$y = kx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

Такъ какъ это уравненіе получается изъ уравненія (α) § 60, если положимъ $f = 0$, то уравненіе (β), опредѣляющее абсциссы точекъ пересѣченія, для разсматриваемаго случая принимаетъ видъ:

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Это—неполное квадратное уравненіе, корни котораго равны по величинѣ и обратны по знаку. Обозначая ихъ попрежнему черезъ x_1 и x_2, имѣемъ $x_2 = -x_1$. Соотвѣтственныя значенія y суть $y_1 = kx_1$ и $y_2 = -kx_1$. Такимъ образомъ получаемъ двѣ точки пересѣченія эллипса (34) съ прямой (α): $M(x_1, y_1)$ и $M'(-x_1, -y_1)$.

Не трудно убѣдиться (§ 4), что средина хорды $M'M$ лежитъ въ началѣ координатъ, т.-е. *всѣ хорды эллипса, проходящія черезъ начало координатъ, дѣлятся въ немъ пополамъ. Точка, въ которой дѣлятся пополамъ всѣ хорды кривой, черезъ нее проходящія, называется центромъ ея.* Начало координатъ есть *центръ* эллипса (34).

§ 62. **Эксцентриситетъ эллипса и его директрисы.** Отношеніе разстоянія c фокусовъ отъ центра къ большой полуоси a называется *эксцентриситетомъ* эллипса. Эксцентриситетъ обозначается буквою e:

$$\frac{c}{a} = e \text{ или } \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35)$$

Изъ формулъ (35) видно, что эксцентриситетъ эллипса *меньше* единицы (§ 56).

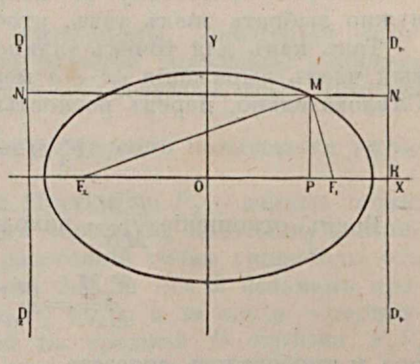
Директрисами эллипса называются двѣ прямыя, опредѣляемыя уравненіями:

$$x = \frac{a}{e} \text{ и } x = -\frac{a}{e} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

Директрисы эллипса суть прямыя, параллельныя оси y и отстоящія отъ центра эллипса на разстояніи $\pm\frac{a}{e}$. Такъ какъ $e < 1$,

то $\frac{a}{e} > a$; слѣдовательно, директрисы лежатъ *внѣ* эллипса. Директриса и фокусъ, лежащіе по одну сторону центра, называются *соотвѣтственными*.

Точки эллипса относительно фокуса и соотвѣтствующей директрисы обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: *отношеніе разстоянія каждой точки эллипса отъ фокуса къ разстоянію ея отъ соотвѣтственной директрисы равно эксцентриситету эллипса.*



Черт. 35.

Пусть F_1 (черт. 35) есть одинъ изъ фокусовъ эллипса, даннаго уравненіемъ (34), и D_1D_1 соотвѣтственная директриса.

Опустимъ перпендикуляръ MN изъ точки M эллипса на директрису D_1D_1.

Нужно доказать, что для каждой точки M эллипса имѣетъ мѣсто равенство $\frac{F_1M}{MN} = e$. Обозначивъ координаты OP и PM точки M черезъ x и y, находимъ

$$MN = PK = OK - OP;$$

но $OK = \frac{a}{e}$ (по опредѣленію директрисы), $OP = x$; слѣдовательно

$$MN = \frac{a - ex}{e}.$$

Въ § 56 для F_1M было найдено слѣдующее выраженіе:

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Замѣчая, что $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$, находимъ:

$$(x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2cx + c^2 + b^2.$$

Но (§ 56) $c^2 + b^2 = a^2$; поэтому, принимая во вниманіе формулы (35), получимъ:

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2 = (ex - a)^2.$$

Для F_1M находимъ выраженіе:

$$F_1M = \pm (ex - a);$$

разстояніе F_1M (радіусъ векторъ точки M) считается величиной *положительной;* поэтому во второй части послѣдняго равенства нужно выбрать знакъ такъ, чтобы она была положительна.

Такъ какъ для точекъ эллипса $|x| \leqslant a$, то $|ex| < a$, т.-е. первый членъ выраженія $ex - a$ меньше a по абсолютной величинѣ. Слѣдовательно, передъ разностью нужно взять знакъ —. Итакъ,

$$F_1M = a - ex.$$

Взявъ отношеніе $\frac{F_1M}{MN}$, находимъ:

$$\frac{F_1M}{MN} = \frac{(a - ex)e}{a - ex} = e,$$

что и требовалось доказать.

Тѣмъ же путемъ легко убѣдиться, что отношеніе $\frac{F_2M}{MN_1}$ разстоянія точки M отъ другого фокуса F_2 къ разстоянію ея отъ соотвѣтственной директрисы D_2D_2 также равно e.

Упражненія. 1. *Написать уравненіе эллипса съ осями* 10 *и* 6, *если центръ его лежитъ въ началѣ координатъ, а оси направлены по осямъ координатъ. Найти его фокусы.*

Отв. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $(\pm 4{,}0)$.

2. *Написать уравненіе эллипса, проходящаго черезъ точку* $(1,\ 0{,}8\sqrt{5})$, *зная, что разстояніе между фокусами его равно* 2, *а центръ и оси расположены, какъ въ упражненіи* 1.

Отв. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

3. *Найти точки пересѣченія эллипса*

$$\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$$

съ прямыми:

a) $y = x + 1$; b) $4x + 15y - 25 = 0$; c) $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$.

Отв. a) *абсциссы точекъ пересѣченія суть* $x = 0$ *и* $x = -1\frac{12}{13}$;

b) *касат. въ точкѣ* $\left(4,\ \frac{3}{5}\right)$;

c) *не пересѣкаетъ.*

4. *Найти длину хорды эллипса (34), перпендикулярной къ большой оси и проходящей черезъ фокусъ.*

Отв. $2b^2/a$.

5. *Малая ось эллипса видна изъ фокуса подъ прямымъ угломъ. Найти его эксцентриситетъ.*

Отв. $e = 0{,}5\sqrt{2}$.

§ 63. **Гипербола. Уравненіе гиперболы.** *Гиперболой называется геометрическое мѣсто точекъ, разность разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ, называемыхъ фокусами, есть величина постоянная.*

Разстоянія точки гиперболы отъ фокусовъ называются *радіусами векторами* точки.

Выведемъ уравненіе гиперболы. Пусть F_1 и F_2 — данныя точки; разстояніе между ними обозначимъ черезъ $2c$; постоянную величину, представляющую разность разстояній точки гиперболы отъ точекъ F_1 и F_2, обозначимъ черезъ $2a$. За ось x возьмемъ прямую, соединяющую данныя точки F_1 и F_2, а за ось y — перпендикуляръ къ ней, возставленный въ срединѣ O отрѣзка F_2F_1 (черт. 36). Если точка M есть одна изъ точекъ гиперболы, то, по опредѣленію, $F_2M - F_1M = 2a$.

Вычислимъ разстоянія F_2M и F_1M точки M отъ точекъ F_2 и F_1. Обозначая черезъ x и y координаты точки M и замѣчая, что координаты точки F_1 суть c и 0, а координаты точки F_2 суть $-c$ и 0, по формулѣ (1) находимъ:

$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \quad F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

По опредѣленію гиперболы

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Возведеніе этого уравненія въ квадратъ даетъ уравненіе:

$$2(x^2 + c^2 + y^2) - 2\sqrt{(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2} = 4a^2,$$

которое, по сокращеніи на 2 и уединеніи радикала, приводится къ слѣдующему:

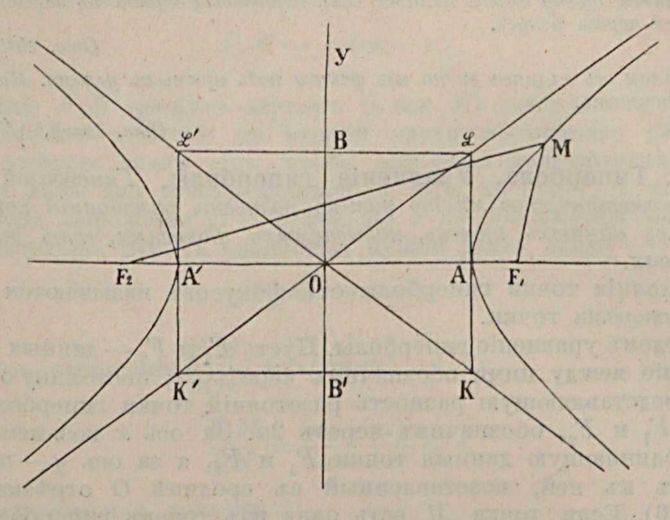
$$\sqrt{(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2} = (x^2 + c^2 + y^2) - 2a^2.$$

Возведя это уравненіе въ квадратъ, получимъ:

$$(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2 = (x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4a^2(x^2 + c^2 + y^2) + 4a^4,$$

или

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2 - a^2)a^2.$$



Черт. 36.

Такъ какъ $F_2M - F_1M < F_2F_1$, то $a < c$; поэтому $c^2 - a^2$ есть величина положительная; положивъ $c^2 - a^2 = b^2$ и раздѣливъ послѣднее уравненіе на a^2b^2, найдемъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Уравненіе (37), какъ связывающее координаты любой точки гиперболы, есть искомое *уравненіе гиперболы*.

§ 64. **Форма гиперболы.** Изъ уравненія (37) имѣемъ:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}; \; x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Изъ перваго изъ этихъ уравненій вытекаютъ слѣдующія заключенія:

1) *значенія* y *мнимы, пока* $|x| < a$; *слѣдовательно, гипербола не пересѣкаетъ оси* y *и не имѣетъ точекъ, лежащихъ въ полосѣ, ограниченной прямыми* $x = \pm a$;

2) $y = 0$ при $x = \pm a$; *гипербола пересѣкаетъ ось* x *въ двухъ точкахъ* A *и* A', *находящихся отъ начала на разстояніи, равномъ* a, *и называемыхъ вершинами гиперболы*;

3) y имѣетъ два значенія, отличающіяся знаками, для каждаго значенія x, абсолютное значеніе котораго больше a; *гипербола есть кривая симметричная относительно оси* x;

4) y неопредѣленно возрастаетъ при неопредѣленномъ возрастаніи x; *гипербола простирается въ безконечность.*

Второе изъ уравненій (α) показываетъ, *что гипербола есть кривая симметричная относительно оси* y.

Изъ того, что гипербола всѣми своими точками лежитъ внѣ полосы, ограниченной прямыми $x = \pm a$, и симметрична относительно оси ординатъ, слѣдуетъ, что она состоитъ изъ *двухъ отдѣльныхъ вѣтвей*, простирающихся въ безконечность (черт. 36).

Разстояніе $A'A = 2a$ между вершинами гиперболы называется *дѣйствительной осью* гиперболы. Построивъ точки $B(0,\ b)$ и $B'(0, -b)$, получимъ отрѣзокъ $B'B$, называемый *мнимой осью* гиперболы.

Гипербола, опредѣляемая уравненіемъ

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

имѣетъ дѣйствительную ось $2b$ и мнимую $2a$. Она называется *сопряженной* по отношенію къ гиперболѣ (37). Если дѣйствительная и мнимая оси гиперболы равны, то гипербола называется *равносторонней*. Уравненіе равносторонней гиперболы таково:

$$x^2-y^2=a^2.$$

§ 65. **Пересѣченіе гиперболы съ прямой.** Для опредѣленія точекъ пересѣченія гиперболы съ прямой, данныхъ соотвѣтственно уравненіями:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{. . . . .} \quad (37)$$

$$y=kx+f, \quad \text{. . . . .} \quad (\alpha)$$

нужно совмѣстно рѣшить эти уравненія.

Исключая y изъ уравненій (37) и (α), найдемъ квадратное уравненіе

$$(a^2k^2-b^2)x^2+2a^2kfx+a^2(f^2+b^2)=0, \quad \text{. . . . .} \quad (\beta)$$

опредѣляющее абсциссы x_1 и x_2 точекъ пересѣченія.

Соотвѣтственныя ординаты y_1 и y_2 найдутся изъ уравненія (α). Такимъ образомъ мы получимъ *двѣ* точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) пересѣченія гиперболы и прямой.—Если корни уравненія (β)

дѣйствительны и *различны*, то прямая пересѣкаетъ гиперболу въ *двухъ различныхъ точкахъ*. Если корни этого уравненія *равны между собой*, то двѣ точки пересѣченія сливаются въ одну, и прямая служитъ *касательной* къ гиперболѣ.—Если корни уравненія (β) *мнимы*, то *прямая не пересѣкаетъ гиперболы*.

§ 66. **Безконечно-удаленныя точки гиперболы. Асимптоты.** Если

$$a^2k^2 - b^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

то одинъ изъ корней уравненія (β) безконечно великъ. Это значитъ, что одна изъ точекъ пересѣченія гиперболы съ прямыми, которыхъ угловой коэффиціентъ k опредѣляется уравненіемъ (γ), есть *безконечно-удаленная точка*. Изъ уравненія (γ) имѣемъ два значенія k:

$$k = +\frac{b}{a} \text{ и } k = -\frac{b}{a}.$$

Прямыя, направленія которыхъ опредѣляются угловымъ коэффиціентомъ $k = +\frac{b}{a}$, имѣютъ *одну* безконечно-удаленную точку. Прямыя, направленіе которыхъ опредѣляется угловымъ коэффиціентомъ $k = -\frac{b}{a}$, имѣютъ также *одну* безконечно-удаленную точку. Эти точки по предыдущему лежатъ на гиперболѣ. Слѣдовательно, гипербола имѣетъ *двѣ безконечно-удаленныя точки*.

Изъ прямыхъ, направленіе которыхъ опредѣляется угловыми коэффиціентами $k = \pm\frac{b}{a}$, разсмотримъ тѣ, которыя проходятъ черезъ начало координатъ. Уравненія этихъ прямыхъ слѣдующія:

$$y = \frac{b}{a}x; \quad y = -\frac{b}{a}x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Найдемъ точки ихъ пересѣченія съ гиперболой (37). Абсциссы этихъ точекъ опредѣляются уравненіемъ (β), въ которомъ нужно положить $k = \pm\frac{b}{a}$ и $f = 0$. При этомъ коэффиціенты обоихъ старшихъ членовъ этого уравненія обратятся въ нули. Оба корня такого квадратнаго уравненія, въ которомъ коэффиціенты при 2-ой и 1-ой степени неизвѣстнаго обращаются въ нули, безконечно велики. Поэтому каждая изъ прямыхъ (38) пересѣкаетъ гиперболу въ одной безконечно-удаленной точкѣ ея, т.-е. представляетъ *касательную въ безконечно-удаленной точкѣ*. Касательныя

къ гиперболѣ въ безконечно удаленныхъ точкахъ ея называются *асимптотами*. Изъ уравненій (38) легко вывести построеніе асимптотъ. Построимъ на дѣйствительной и мнимой осяхъ гиперболы прямоугольникъ $KLL'K'$ (черт. 36). Діагонали $K'L$ и KL' его суть асимптоты гиперболы. Дѣйствительно, угловой коэффиціентъ прямой OL есть $\tan \widehat{AOL}$; изъ прямоугольнаго треугольника AOL имѣемъ:

$$\tan \widehat{LOA} = \frac{AL}{OA} = \frac{b}{a};$$

поэтому прямая OL есть асимптота, опредѣляемая первымъ изъ уравненій (38). Угловой коэффиціентъ прямой LO' есть $\tan \widehat{AOL'}$, а $\tan \widehat{AOL'} = \tan (180^0 - \widehat{A'OL'}) = -\tan \widehat{A'OL'}$; изъ прямоугольнаго треугольника $A'OL'$ имѣемъ: $\tan \widehat{A'OL'} = \frac{b}{a}$; слѣдовательно, угловой коэффиціентъ прямой OL' равенъ $-\frac{b}{a}$, и прямая OL' есть асимптота гиперболы, опредѣляемая вторымъ изъ уравненій (38).

§ 67. **Центръ гиперболы.** Разсмотримъ пересѣченіе гиперболы съ прямыми, проходящими черезъ начало координатъ. Такія прямыя опредѣляются уравненіемъ:

$$y = kx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Для опредѣленія абсциссъ точекъ пересѣченія гиперболы (37) и прямой (α) получимъ уравненіе:

$$(a^2k^2 - b^2)x^2 + a^2b^2 = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

корни котораго суть

$$x_1 = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \text{ и } x_2 = -x_1.$$

Они *мнимы*, если $b^2 < a^2k^2$, т.-е. если $|k| > \frac{b}{a}$.

Прямыя (α), для которыхъ $|k| > \frac{b}{a}$, лежатъ въ углѣ LOL' между асимптотами; *онѣ не пересѣкаютъ гиперболы*. Корни уравненія (β) *безконечно велики*, если $k = \pm \frac{b}{a}$. Прямыя (α) въ этомъ

случаѣ представляютъ асимптоты гиперболы. Корни уравненія (β) *дѣйствительны*, если $b^2 > a^2k^2$, т.-е. если $|k| < \frac{b}{a}$. Прямыя (α), для которыхъ $|k| < \frac{b}{a}$, лежатъ въ углѣ KOL между асимптотами; каждая изъ нихъ пересѣкаетъ гиперболу въ двухъ точкахъ (x_1, y_1) и (x_2, y_2), *симметрично расположенныхъ относительно начала*. Отрѣзокъ каждой изъ этихъ прямыхъ, заключенный между точками пересѣченія ея съ гиперболой, представляетъ хорду гиперболы; такъ какъ, по предыдущему, концы этихъ хордъ представляютъ точки, симметричныя относительно начала, то *въ началѣ координатъ всѣ хорды, черезъ него проходящія, дѣлятся пополамъ*. Поэтому (§ 61) начало координатъ есть *центръ* гиперболы, данной уравненіемъ (37).

§ 68. **Эксцентриситетъ и директрисы гиперболы.** Отношеніе разстоянія c фокусовъ гиперболы отъ центра къ дѣйствительной полуоси a называется *эксцентриситетомъ* гиперболы и обозначается буквой e:

$$\frac{c}{a} = e \text{ или } \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = e \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

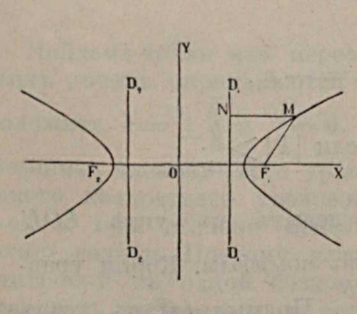
Эксцентриситетъ гиперболы *больше* единицы (сравн. § 62).

Директрисами гиперболы называются двѣ прямыя, опредѣляемыя уравненіями

$$x = \frac{a}{e} \text{ и } x = -\frac{a}{e} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

Директриса и фокусъ гиперболы, лежащіе по одну сторону центра, называются *соотвѣтственными*.

Точки гиперболы обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ относительно соотвѣтственныхъ фокуса и директрисы: *отношеніе разстоянія точки гиперболы отъ фокуса къ разстоянію ея отъ соотвѣтственной директрисы равно эксцентриситету гиперболы* (сравн. § 62).



Черт. 37.

Пусть $M(x, y)$ есть одна изъ точекъ гиперболы, данной уравненіемъ (37); F_1 и F_2 фокусы гиперболы и D_1D_1 директриса, соотвѣтствующая фокусу F_1 (черт. 37). Не трудно убѣдиться, что разстояніе MN точки M отъ директрисы D_1D_1 равно

$\frac{\pm(ex-a)}{e}$, при чемъ нужно взять знакъ $+$, если точка M лежитъ на *правой* вѣтви гиперболы, и знакъ —, если точка M лежитъ на ея *лѣвой* вѣтви.

Вычислимъ разстояніе точки M отъ фокуса:

$$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-2cx+(c^2-b^2)}=\sqrt{e^2x^2-2aex+a^2}=\pm(ex-a).$$

Такъ какъ радіусъ векторъ F_1M считается величиной положительной, то передъ разностью $ex-a$ нужно взять знакъ $+$, если она положительна, и знакъ —, если она отрицательна. Но для точекъ гиперболы $|x|>a$ (§ 64); кромѣ того $e>1$; слѣдовательно, $|ex|>a$. Поэтому при $x>0$, т.-е. для точекъ *правой* вѣтви гиперболы, имѣемъ $F_1M=ex-a$, а при $x<0$, т.-е. для точекъ *лѣвой* вѣтви ея, $F_1M=a-ex$. Составивъ отношеніе $\frac{F_1M}{MN}$, получимъ:

$$\frac{F_1M}{MN}=\frac{\pm(ex-a)\cdot e}{\pm(ex-a)}, \text{ или } \frac{F_1M}{MN}=e,$$

что и требовалось доказать.

Легко видѣть, что по отношенію къ фокусу F_2 и соотвѣтственной директрисѣ точки гиперболы обладаютъ тѣмъ же свойствомъ.

Упражненія. 1. *Написать уравненіе гиперболы, центръ которой лежитъ въ началѣ координатъ, дѣйствительная ось совпадаетъ съ осью x, а мнимая—съ осью y, если дѣйствительная ось равна* 8, *а мнимая* 6. *Найти ея фокусы и асимптоты.*

Отв. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; $(\pm 5{,}0)$; $y=\pm 0{,}75x$.

2. *Оси гиперболы расположены, какъ въ упражненіи* 1. *Гипербола проходитъ черезъ точку* $\left(5, \frac{9}{4}\right)$; *разстояніе между ея фокусами* $=10$. *Написать уравненіе этой гиперболы.*

Отв. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

3. *Черезъ фокусъ гиперболы* (37) *проведена хорда, перпендикулярная къ дѣйствительной оси. Найти длину этой хорды.*

Отв. $2b^2/a$.

ГЛАВА VII.

Преобразованіе координатъ. Очеркъ общей теоріи кривыхъ 2-го порядка.

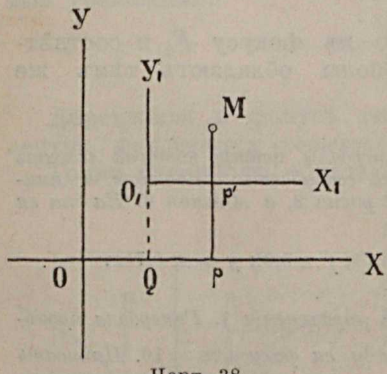
§ 69. Въ предыдущей главѣ мы вывели уравненія круга, параболы, эллипса и гиперболы, опредѣливъ эти кривыя, какъ геометрическія мѣста точекъ, удовлетворяющихъ извѣстнымъ условіямъ. Для всѣхъ этихъ кривыхъ получились уравненія 2-ой степени, при чемъ уравненіе круга оказалось частнымъ случаемъ уравненія эллипса. Такимъ образомъ мы познакомились съ тремя типами кривыхъ, уравненія которыхъ 2-ой степени. Существенное различіе этихъ кривыхъ заключается въ *числѣ* безконечно удаленныхъ точекъ: *эллипсъ* не имѣетъ безконечно удаленныхъ точекъ, *парабола* имѣетъ *одну* и *гипербола—двѣ* безконечно удаленныя точки.

Уравненія всѣхъ трехъ кривыхъ представляютъ частные случаи *общаго* уравненія 2-ой степени съ двумя неизвѣстными:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41)$$

Такъ, напр., если $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{33} = -1$, а остальные коэффиціенты равны *нулю*, то уравненіе (41) обратится въ уравненіе эллипса; если $a_{22} = 1$, $a_{13} = -p$, а остальные коэффиціенты равны *нулю*, то уравненіе (41) приведется къ уравненію параболы и т. д.

Является вопросъ, *всегда* ли уравненіе (41) представляетъ уравненіе одной изъ кирвыхъ, разсмотрѣнныхъ въ предыдущей главѣ? Съ аналитической точки зрѣнія этотъ вопросъ равносиленъ вопросу о возможности привести уравненіе (41) къ одному изъ тѣхъ частныхъ видовъ его, которые мы получили въ §§ 49, 51, 56 и 63. Средствомъ для преобразованія уравненія (41) служитъ *выборъ* системы осей координатъ. Поэтому прежде всего нужно ознакомиться съ формулами перехода отъ одной системы координатъ къ другой.



Черт. 38.

§ 70. **Преобразованіе координатъ.** Задача преобразованія координатъ заключается *въ выраженіи координатъ точки по одной системѣ черезъ ея координаты по другой системѣ.*

Двѣ системы координатъ могутъ имѣть: 1) *разныя* начала и *одинаковое* направленіе осей; 2) *одно* начало и *различныя* направленія осей, и 3) *разныя* начала и *различныя* направленія осей.

Разсмотримъ отдѣльно переходъ отъ одной *прямоугольной* системы координатъ къ другой также *прямоугольной* во всѣхъ этихъ случаяхъ.

1) Пусть системы xOy и $x'O'y'$ имѣютъ начала O и O' и *одинаково направленныя оси* (черт. 38); обозначимъ черезъ a и b соотвѣтственно абсциссу и ординату точки O' относительно первой системы.

Координаты какой-нибудь точки M по первой системѣ назовемъ черезъ x и y, и по второй—черезъ x' и y'. Опустивъ изъ точекъ O' и M перпендикуляры $O'Q$ и MP на ось Ox, находимъ:

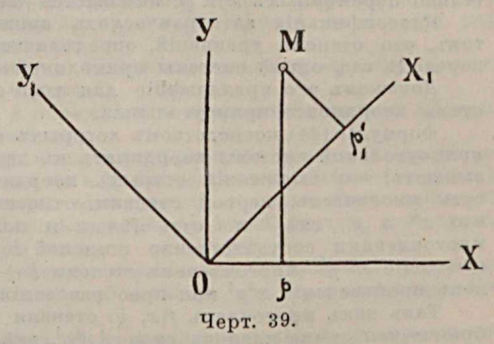
$$OP = OQ + QP = OQ + O'P'.$$
$$PM = PP' + P'M = QO' + P'M.$$

Но $OP = x$; $PM = y$; $OQ = a$; $QO' = b$; $O'P' = x'$; $P'M = y'$. На основаніи предыдущихъ равенствъ получимъ формулы преобразованія координатъ для разсматриваемаго случая:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

2) Пусть двѣ системы координатъ xOy и $x'O'y'$ имѣютъ одно начало O и разныя направленія осей (черт. 39). Чтобы опредѣлить положеніе второй системы относительно первой, достаточно знать уголъ α между осями Ox и Ox'.

Возьмемъ произвольную точку M, координаты которой по первой системѣ обозначимъ черезъ x, y, а по второй—черезъ x' и y'. Опустивъ изъ нея перпендикуляръ MP на ось Ox и перпендикуляръ MP' на ось Ox', проектируемъ ломаную линію $OP'MP$ на ось Ox. Получимъ (§ 8):



Черт. 39.

$$OP = OP' \cos\alpha + P'M \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + MP \cos\frac{\pi}{2}.$$

Проектируя ломаную $POP'M$ на ось Oy, найдемъ

$$PM = PO \cos\frac{\pi}{2} + OP' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + P'M \cos\alpha.$$

Замѣтивъ, что $OP = x$, $PM = y$, $OP' = x'$ и $P'M = y'$, изъ этихъ равенствъ получимъ формулы преобразованія координатъ для случая системъ съ однимъ началомъ и разными направленіями осей:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

3. Если двѣ системы xOy и $x'O'y'$ координатъ имѣютъ *различныя начала и различныя направленія осей*, то для опредѣленія второй системы относительно первой нужно знать положеніе ея начала O' и уголъ, составленный осями Ox и $O'x'$. Пусть координаты точки O' относительно первой системы равны a и b, а уголъ между осями Ox и $O'x'$ есть α. Переходъ отъ первой системы ко второй можно совершить съ помощію *третьей* системы $x''O'y''$, имѣющей общее начало со второй системой, и оси, параллельныя осямъ первой системы. Называя координаты точки M по первой, второй и

третьей системѣ соотвѣтственно черезъ x, y; x', y' и x'', y'' и пользуясь формулами (42) и (43), находимъ

$$x = x'' + a;\ y = y'' + b;$$
$$x'' = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha;\quad y'' = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

Отсюда получаемъ *общія* формулы преобразованія прямоугольныхъ координатъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (44)$$

§ 71. **Порядокъ кривой.** Кривая, опредѣляемая уравненіемъ

$$f(x, y) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (\alpha)$$

гдѣ f обозначаетъ *цѣлый раціональный многочленъ n-ой степени* относительно перемѣнныхъ x и y, называется *алгебраической кривой n-го порядка*.

Классификація алгебраическихъ кривыхъ по порядкамъ основана на томъ, что степень уравненій, опредѣляющихъ кривыя, не измѣняется при переходѣ отъ одной системы прямолинейныхъ координатъ къ другой.

Докажемъ это предложеніе для того случая, когда старая и новая системы координатъ прямоугольныя.

Формулы (44), посредствомъ которыхъ совершается переходъ отъ одной прямоугольной системы координатъ къ другой, также прямоугольной, показываютъ, что выраженія старыхъ координатъ x и y черезъ новыя x' и y' суть многочлены первой степени относительно x' и y'. Отсюда слѣдуетъ, что x^k и y^l, гдѣ k и l суть цѣлыя и положительныя числа, выражаются многочленами соотвѣтственно степеней k и l относительно x' и y', а произведеніе $x^k\, y^l$—многочленомъ степени $k + l$ относительно x' и y', т.-е. степень произведенія $x^k y^l$ при преобразованіи (44) *не повышается*.

Такъ какъ многочленъ $f(x, y)$ степени n относительно x и y есть алгебраическая сумма членовъ вида $Ax^k y^l$, гдѣ A есть постоянное и $k + l \leqslant n$, то преобразованіе его по формуламъ (44) приводитъ къ многочлену $F(x', y')$, степень котораго, на основаніи сказаннаго, не можетъ быть *больше n*. Но легко видѣть, что она не можетъ быть и *меньше n*. Дѣйствительно, если бы степень $F(x', y')$ была меньше n, то при обратномъ переходѣ отъ системы $x'y'$ къ системѣ xy многочленъ $F(x', y')$ долженъ былъ бы преобразоваться въ многочленъ $f(x, y)$ степени высшей, чего, какъ мы видѣли, быть не можетъ.

Итакъ, *при переходѣ отъ одной прямоугольной системы координатъ къ другой, также прямоугольной, степень многочлена $f(x, y)$, а, слѣд., и степень уравненія* (α) *не измѣняется* *).

Кривая, опредѣляемая уравненіемъ (41), есть кривая *второго порядка*.

§ 72. **Пересѣченіе кривой 2-го порядка съ прямой.** Для опредѣленія точекъ пересѣченія кривой (41) съ прямой

$$y = kx + b, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (l)$$

нужно рѣшить совмѣстно эти два уравненія. Подставляя значенія y изъ послѣдняго уравненія въ уравненіе (41), находимъ:

$$(a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2)x^2 + 2(a_{12}b + a_{22}kb + a_{13} + a_{23}k)x + (a_{22}b^2 + \\ + 2a_{23}b + a_{33}) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (m$$

*) Доказательство теоремы для общаго случая см. въ подробныхъ курсахъ аналитической геометріи.

Обозначая корни этого уравненія черезъ x_1 и x_2 и вычисляя изъ уравненія прямой соотвѣтственныя значенія y_1 и y_2, получаемъ два рѣшенія: x_1, y_1 и x_2, y_2. Отсюда заключаемъ, что *прямая пересѣкаетъ кривую 2-го порядка въ двухъ точкахъ.* Въ частныхъ случаяхъ эти точки могутъ оказаться *мнимыми* или *совпадающими.*

Въ первомъ случаѣ прямая *не пересѣкаетъ* кривой, а во второмъ служитъ *касательной къ ней.*

Одинъ изъ корней уравненія (m) безконечно великъ, если

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0.$$

Опредѣливъ изъ этого уравненія k, получимъ

$$k = \frac{-a_{12} \mp \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (n)$$

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то значенія k *мнимы*; если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то k имѣетъ два равныхъ значенія; если $a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то k имѣетъ *два различныхъ* дѣйствительныхъ значенія.

Разность $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ называется *дискриминантомъ старшихъ членовъ* уравненія (41). Обозначимъ его черезъ D.

Принимая во вниманіе, что k опредѣляетъ направленіе прямой (l), приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) *если* $D > 0$, *то нѣтъ прямыхъ, пересѣкающихъ кривую* (41) *въ безконечно удаленной точкѣ,* т.-е. *кривая не имѣетъ безконечно удаленныхъ точекъ;*

2) *если* $D = 0$, *то существуетъ одна система параллельныхъ прямыхъ, пересѣкающихъ кривую* (41) *въ одной безконечно удаленной точкѣ,* т.-е. *кривая имѣетъ одну безконечно удаленную точку;*

3) *если* $D < 0$, *то есть двѣ системы параллельныхъ прямыхъ, пересѣкающихъ кривую въ безконечно удаленныхъ точкахъ,* т.-е. *кривая имѣетъ двѣ безконечно удаленныя точки.*

Такимъ образомъ мы получаемъ тѣ три типа кривыхъ 2-го порядка, съ которыми познакомились въ предыдущей главѣ.

Покажемъ теперь, что кривыя 2-го порядка *перваго* типа суть *эллипсы*, кривыя *второго* типа—*параболы* и кривыя *третьяго* типа—*гиперболы.* Для этого воспользуемся преобразованіемъ координатъ.

§ 73. **Преобразованіе уравненія (41) въ случаѣ $D \neq 0$.** Разсматривая въ уравненіи (41) x и y, какъ прямоугольныя координаты точки на плоскости, перенесемъ *начало* координатъ въ точку $C(\xi, \eta)$, сохранивъ при этомъ направленіе осей. Такъ какъ по формуламъ (42)

$$x = x' + \xi,\ y = y' + \eta,$$

то уравненіе (41) преобразуется въ слѣдующее:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13})x' + 2(a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23})y' + \\ + a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + 2a_{13}\xi + 2a_{23}\eta + a_{33} = 0 \quad \ldots\ldots (41')$$

Пользуясь произволомъ въ выборѣ новаго начала, положимъ

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13} = 0, \\ a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ

$$\xi = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a^2_{12}},\ \eta = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a^2_{12}} \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

Эти формулы даютъ для ξ и η опредѣленныя значенія, если $D = a_{11}a_{22} - a^2_{12} \neq 0$. Итакъ, *если дискриминантъ старшихъ членовъ уравненія* (41) *отличенъ отъ нуля,то уравненіе* (41) *данной кривой упрощается перенесеніемъ начала въ точку, координаты которой опредѣляются формулами* (46).

Относительно системы координатъ съ началомъ въ точкѣ $C(\xi, \eta)$ кривая опредѣляется уравненіемъ слѣдующаго вида:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (47)$$

при чемъ коэффиціенты старшихъ членовъ этого уравненія тѣ же, что и въ уравненіи (41), а свободный членъ a_{33} уравненія (47) есть результатъ подстановки ξ и η вмѣсто x и y въ первую часть уравненія (41) (см. ур. 41′).

Изъ уравненія (47) легко видѣть, что если точка $M(x, y)$ лежитъ на кривой (47), то на кривой находится и точка $M'(-x, -y)$, симметричная съ M относительно начала. Поэтому всякая хорда кривой, проходящая черезъ начало координатъ, дѣлится въ немъ пополамъ; слѣд. (§ 61) *новое начало $C(\xi, \eta)$ есть центръ кривой* (41).

Итакъ, *если дискриминантъ старшихъ членовъ уравненія* (41) *отличенъ отъ нуля, то уравненіе* (41) *представляетъ центральную кривую*. Уравненіе (47) есть уравненіе центральной кривой, *отнесенной къ центру*.

Дальнѣйшее упрощеніе уравненія (47) центральной кривой 2-го порядка производится выборомъ *направленія* осей координатъ. Повернемъ систему координатъ около центра кривой на уголъ α. Называя координаты точки по новой системѣ черезъ x', y', подставляя значенія x и y изъ формулъ (43) въ уравненіе (47) и отбрасывая въ результатѣ значки у x' и y', находимъ:

$$\begin{aligned}&(a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha)x^2 + \\ &+ 2[a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (a_{11} - a_{12})\sin\alpha\cos\alpha]xy + \\ &+ (a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha)y^2 + a_{33} = 0 \quad \ldots \ldots (47')\end{aligned}$$

Пользуясь произволомъ въ выборѣ угла α, положимъ

$$a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (a_{11} - a_{22})\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

откуда получимъ:

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (48)$$

Эта формула даетъ опредѣленное значеніе для $\tan 2\alpha$ за исключеніемъ того случая, когда $a_{12} = 0$ и $a_{11} = a_{22}$. Но если $a_{12} = 0$, то и самое преобразованіе излишне, такъ какъ въ уравненіи (47) нѣтъ того члена, который мы хотимъ удалить при помощи этого преобразованія.

Уравненіе (48) опредѣляетъ уголъ α по $\tan 2\alpha$ и, слѣд., даетъ не одинъ, а безчисленное множество угловъ. Если α_0 есть одинъ изъ нихъ, то всѣ углы, удовлетворяющіе уравненію (48), заключаются въ формулѣ:

$$\alpha = \alpha_0 + k\frac{\pi}{2},$$

гдѣ k есть нуль или цѣлое число. Но легко видѣть, что всѣ эти углы опредѣляютъ только *двѣ* прямыя и, слѣд., *единственную* систему новыхъ осей координатъ. Уравненіе кривой (47) относительно этой новой системы координатъ имѣетъ видъ:

$$Ax^2 + By^2 + a_{33} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (49)$$

Перенося a_{33} во вторую часть уравненія и предполагая, что оно *отлично отъ нуля*, можно замѣнить это уравненіе равносильнымъ ему уравненіемъ

$$\frac{A}{-a_{33}}x^2+\frac{B}{-a_{33}}y^2=1,$$

или уравненіемъ

$$\frac{x^2}{-\frac{a_{33}}{A}}+\frac{y^2}{-\frac{a_{33}}{B}}=1,$$

въ которомъ параметрами являются отношенія, стоящія въ знаменателяхъ членовъ первой части.

Если $-\frac{a_{33}}{A}>0$ и $-\frac{a_{33}}{B}>0$, то, полагая

$$-\frac{a_{33}}{A}=a^2 \text{ и } -\frac{a_{33}}{B}=b^2,$$

получаемъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

эллипса съ полуосями a и b (§ 56) или круга радіуса a, если $a=b$.

Если отношенія $-\frac{a_{33}}{A}$ и $-\frac{a_{33}}{B}$ противоположныхъ знаковъ, то можно считать первое изъ нихъ положительнымъ, а второе отрицательнымъ, потому что противоположный случай приводится къ этому перемѣной *названія* осей координатъ. Полагая

$$-\frac{a_{33}}{A}=a^2 \text{ и } \frac{a_{33}}{B}=b^2,$$

находимъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

гиперболы (§ 63).

При $a_{33}=0$ уравненіе (49) принимаетъ видъ:

$$Ax^2+By^2=0.$$

Если A и B *одинаковыхъ* знаковъ, то это уравненіе удовлетворяется только одной парой вещественныхъ значеній x и y, а именно: $x=0$ и $y=0$. Слѣд., оно опредѣляетъ *точку*, а именно *начало координатъ*.

Если A и B противоположныхъ знаковъ, то, полагая

$$A=\frac{1}{a^2} \text{ и } B=-\frac{1}{b^2},$$

находимъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51')$$

которое распадается на два уравненія *первой* степени:

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ и } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0.$$

Каждое изъ нихъ есть уравненіе прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Поэтому уравненіе (51′) представляетъ *пару пересѣкающихся прямыхъ*.

Итакъ, изслѣдованіе общаго уравненія центральныхъ кривыхъ 2-го порядка ($D\neq 0$) приводитъ насъ къ извѣстнымъ уже намъ кривымъ *двухъ* типовъ: *эллипсу* (съ *кругомъ* и *точкой*, какъ частными случаями его) и *гиперболѣ* (съ *парою пересѣкающихся прямыхъ* въ качествѣ частнаго случая).

Остается показать, что $D>0$ соотвѣтствуетъ *эллипсу* и $D<0$ соотвѣтствуетъ *гиперболѣ*. Для этого докажемъ, что *дискриминантъ старшихъ членовъ уравненія* (41) *не измѣняется при замѣнѣ одной системы координатъ черезъ другую.*

При перенесеніи начала координатъ и сохраненіи направленія осей коэффиціенты старшихъ членовъ не измѣняются (урр. 41 и 41′). Слѣд., не измѣняется и дискриминантъ D.

При сохраненіи начала и поворотѣ системы координатъ на уголъ α коэффиціенты a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} выражаются черезъ a_{11}, a_{12}, a_{22} слѣдующимъ образомъ (уравнен. 47′):

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\sin^2\alpha,\\ a'_{12} &= a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-(a_{11}-a_{12})\sin\alpha\cos\alpha,\\ a'_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha-2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Преобразуемъ эти равенства, выразивъ $\cos^2\alpha$, $\sin\alpha\cos\alpha$ и $\sin^2\alpha$ черезъ $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$; получимъ:

$$a'_{11}=\frac{1}{2}\Big\{(a_{11}+a_{22})+(a_{11}-a_{22})\cos 2\alpha+2a_{12}\sin 2\alpha\Big\},$$

$$a'_{12}=a_{12}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}(a_{11}-a_{22})\sin 2\alpha,$$

$$a'_{22}=\frac{1}{2}\Big\{(a_{11}+a_{22})-(a_{11}-a_{22})\cos 2\alpha-2a_{12}\sin 2\alpha\Big\}.$$

Отсюда находимъ:

$$\begin{aligned} a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12} &= \frac{1}{4}\Big\{(a_{11}+a_{22})^2-[(a_{11}-a_{22})\cos 2\alpha+2a_{12}\sin 2\alpha]^2\Big\}-a^2_{12}\cos^2 2\alpha+\\ &+a_{12}(a_{11}-a_{22})\sin 2\alpha\cos 2\alpha-\frac{1}{4}(a_{11}-a_{22})^2\sin^2 2\alpha=\\ &=\frac{1}{4}(a_{11}+a_{22})^2-\frac{1}{4}(a_{11}-a_{22})^2-a^2_{12}=a_{11}a_{22}-a^2_{12}, \end{aligned}$$

т.-е. *дискриминантъ старшихъ членовъ уравненія* (41) *не измѣняется при поворотѣ осей координатъ на произвольный уголъ* α.

Вычисляя дискриминанты старшихъ членовъ уравненій (50) и (51), получимъ для уравненія (50):

$$D=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}=\frac{1}{a^2b^2}>0,$$

а для уравненія (51):

$$D=\frac{1}{a^2}\cdot\left(-\frac{1}{b^2}\right)=-\frac{1}{a^2b^2}<0.$$

Отсюда выводимъ заключеніе, что *кривыя 2-го порядка, не имѣющія безконечно удаленныхъ точекъ, суть эллипсы, а кривыя 2-го порядка, имѣющія двѣ безконечно удаленныя точки, суть гиперболы.*

§ 74. **Преобразованіе уравненія** (41) **въ случаѣ** $D=0$. Въ случаѣ $D=0$ формулы (46) даютъ для ξ и η или безконечныя, или неопредѣленныя значенія.

Это значитъ, что уравненіе (41) представляетъ въ этомъ случаѣ или кривую *безъ центра*, или кривую *съ неопредѣленнымъ центромъ*.

Изъ уравненія (n) слѣдуетъ, что прямыя, направленіе которыхъ опредѣляется угловымъ коэффиціентомъ

$$k=-\frac{a_{12}}{a_{22}},$$

пересѣкаютъ кривую (41) къ безконечно удаленной точкѣ.

Преобразуемъ уравненіе (41), сохранивъ начало O координатъ и взявъ за ось абсциссъ прямую Ox' съ угловымъ коэффиціентомъ $k=-\frac{a_{12}}{a_{22}}$, а за ось ординатъ прямую Oy', перпендикулярную къ Ox'. Пользуясь формулами (43), мы получимъ уравненіе вида

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0, \quad . \ . \ . \ . \ (p)$$

въ которомъ черезъ a' со значками обозначены значенія коэффиціентовъ общаго уравненія послѣ замѣны системы xOy системой $x'O'y'$, при чемъ по свойству дискриминанта старшихъ членовъ уравненія (§ 73) существуетъ соотношеніе

$$a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (q)$$

Абсциссы точекъ пересѣченія кривой (p) съ осью x', уравненіе которой есть $y'=0$, опредѣляются уравненіемъ:

$$a'_{11}x'^2+2a'_{13}x'+a'_{33}=0.$$

Такъ какъ по выбору оси x' одна изъ точекъ пересѣченія есть безконечно удаленная точка, то одинъ изъ корней послѣдняго уравненія *безконечно великъ.* Слѣд., $a'_{11}=0$.

Подставляя найденное значеніе a'_{11} въ уравненіе (q), находимъ $a'_{12}=0$.

Итакъ, указаннымъ преобразованіемъ уравненіе (41) приводится къ уравненію вида

$$a'_{22}y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (r)$$

Для дальнѣйшаго упрощенія уравненія кривой 2-го порядка безъ центра замѣтимъ, что при $a'_{13}\neq 0$ уравненіе (r) можно замѣнить слѣдующимъ:

$$a'_{22}\left(y'+\frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2=-2a'_{13}\left(x'-\frac{a'^2_{23}}{2a'_{22}a'_{13}}+\frac{a'_{33}}{2a'_{13}}\right).$$

Перенося начало координатъ въ точку, координаты которой суть

$$\frac{a'^2_{23}}{2a'_{22}a'_{12}}-\frac{a'_{23}}{2a'_{13}} \text{ и } -\frac{a'_{23}}{a'_{22}},$$

и называя новыя координаты черезъ x и y, мы получимъ уравненіе

$$a'_{22}y^2 = -2a'_{13}x,$$

или, если положить $p = -\frac{a'_{13}}{a'_{22}}$,

$$y^2 = 2px,$$

т.-е. уравненіе параболы (§ 51).

При $a'_{13} = 0$ уравненіе (r) приводится къ слѣдующему:

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (s)$$

это уравненіе распадается на два уравненія первой степени:

$$y' = y_1 \text{ и } y' = y_2,$$

гдѣ y_1 и y_2 суть корни уравненія (s). Уравненіе (s) представляетъ поэтому *пару* параллельныхъ прямыхъ; эти прямыя совпадаютъ при $y_1 = y_2$. Если y_1 и y_2 мнимы, то не существуетъ мѣста точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію (s).

Итакъ, преобразованіе уравненія кривыхъ 2-го порядка безъ центра приводитъ къ уравненію *параболы* или къ уравненію *пары* параллельныхъ прямыхъ.

Въ послѣднемъ случаѣ формулы (46) даютъ для ξ и η неопредѣленныя выраженія.

§ 75. **Коническія сѣченія.** Кривыя 2-го порядка можно получить черезъ сѣченіе плоскостями прямого круглаго конуса съ двумя полостями. Плоскости, не параллельныя ни одной образующей, даютъ въ сѣченіи или *эллипсъ*, или *кругъ*, или *точку*. Плоскости, параллельныя *одной* образующей, даютъ въ сѣченіи или *параболу*, или *прямую*. Плоскости, параллельныя двумъ образующимъ, даютъ въ сѣченіи или *гиперболу*, или *пару пересѣкающихся прямыхъ*.

Поэтому кривыя 2-го порядка называются *коническими сѣченіями*.

Упражненія. 1. *Показать, что уравненіе* $xy = m^2$ *есть уравненіе гиперболы.*

Преобразовать это уравненіе, принявъ за оси координатъ равнодѣлящія угловъ между осями x *и* y.

Отв. $x'^2 - y'^2 = 2m^2$.

Примѣчаніе. *Гипербола* $xy = m^2$ *имѣетъ равныя полуоси и называется равностороннею* (§ 64). *Оси* x *и* y *суть ея асимптоты.*

2. *Преобразовать уравненіе* (34) *эллипса и уравненіе* (37) *гиперболы, взявъ за начало координатъ для эллипса лѣвую, а для гиперболы правую вершину и сохранивъ направленіе осей координатъ.*

Отв. $y^2 = 2px - qx^2$,

$y^2 = 2px + qx^2$, *гдѣ* $p = \frac{b^2}{a}$, $q = \frac{b^2}{a^2}$. *)

---

*) О названіяхъ кривыхъ 2-го порядка въ связи съ этими уравненіями см. курсъ проф. Б. К. Млодзѣевскаго: *Основы аналитической геометріи на плоскости.* (Москва, 1908). Стр. 236.

ГЛАВА VIII.

Краткія свѣдѣнія о поверхностяхъ второго порядка.

§ 76. **Порядокъ поверхности.** Изученіе поверхностей въ аналитической геометріи приводится къ изученію уравненій вида:

$$f(x,\ y,\ z)=0\ (\S\ 23).$$

Если f есть *алгебраическая* функція, то и поверхность, изображаемая этимъ уравненіемъ, называется *алгебраической*. Если $f(x,\ y,\ z)$ есть *цѣлый раціональный многочленъ степени* n, то поверхность, опредѣляемая уравненіемъ $f(x,\ y,\ z)=0$, называется *поверхностью* n*-аго порядка*. Классификація алгебраическихъ поверхностей по порядкамъ основана на томъ, что степень уравненія, первая часть котораго есть цѣлый раціональный многочленъ, не измѣняется при переходѣ отъ одной системы декартовыхъ координатъ къ другой *) (ср. § 71).

Плоскость есть поверхность *перваго* порядка (§ 36).

§ 77. **Поверхность второго порядка.** Общее уравненіе поверхностей 2-го порядка таково:

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+B_1yz+B_2zx+B_3xy+C_1x+C_2y+C_3z+D=0.$$

Посредствомъ преобразованія координатъ это уравненіе можетъ быть приведено къ одному изъ слѣдующихъ видовъ:

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+D=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha)$$
$$A_1x^2+A_2y^2+Cz=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta)$$

Если $(x,\ y,\ z)$ есть точка, лежащая на поверхности (α), то на ней лежитъ также и точка $(-x,-y,-z)$. Хорда, соединяющая эти двѣ точки, дѣлится пополамъ въ началѣ координатъ (§ 11).

Начало координатъ является срединой всѣхъ хордъ поверхности, черезъ нее проходящихъ, и называется *центромъ* поверхности; поверхности, имѣющія центръ, называются *центральными*.

Поэтому уравненіе (α) есть уравненіе *центральныхъ* поверхностей.

Уравненіе (β) есть уравненіе поверхностей безъ центра (ср. §§ 73 и 74).

§ 78. **Различные случаи уравненія** (α). 1) Уравненіе (α) *при коэффиціентахъ, отличныхъ отъ нуля*, приводится къ одному изъ слѣдующихъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\beta)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\gamma)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\ \ldots\ (\delta)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1;-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.\ldots\ (\varepsilon)$$

---

*) Подробности см. въ курсахъ аналитической геометріи въ пространствѣ.

Уравненіе (β) получается въ томъ случаѣ, когда всѣ коэффиціенты уравненія (α) *одного* знака. Легко видѣть, что уравненіе (β) не удовлетворяется никакими вещественными значеніями координатъ x, y, z. Поэтому *нѣтъ* поверхности, опредѣляемой этимъ уравненіемъ *).

Уравненіе (γ) получается изъ уравненія (α), когда коэффиціенты A_1, A_2 и A_3 одного знака, а коэффиціентъ D—противоположнаго.

Поверхность (γ) называется *эллипсоидомъ*.

Уравненія (δ) суть уравненія одного типа и получаются изъ уравненія (α) въ предположеніи, что два изъ коэффиціентовъ A одного знака, а третій коэффиціентъ A и коэффиціентъ D имѣютъ знакъ, противоположный знаку пары коэффиціентовъ A. Поверхности (δ) называются *гиперболоидами съ одной полостью* или *однополостными гиперболоидами*.

Уравненія (ε) также одного типа и получаются изъ уравненія (α) въ предположеніи, что два изъ коэффиціентовъ A и коэффиціентъ D одного знака, а третій коэффиціентъ A—противоположнаго знака.

Поверхности (ε) называются *гиперболоидами съ двумя полостями* или *двуполостными гиперболоидами*.

Свѣдѣнія объ этихъ поверхностяхъ приведены ниже (§§ 78—87).

2) При $D=0$ и A отличныхъ отъ нуля уравненіе (α) приводится къ одному изъ слѣдующихъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\zeta)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \ldots\ldots (\eta)$$

Уравненіе (ζ) удовлетворяется только одной тройкой вещественныхъ чиселъ: $x=0$, $y=0$, $z=0$. Поверхность, изображаемая этимъ уравненіемъ, обращается въ *точку* (начало координатъ).

Уравненія (η) одного типа и опредѣляютъ собою *конусы 2-го порядка* (§ 91).

3) При $A_3=0$ и остальныхъ коэффиціентахъ, отличныхъ отъ нуля, уравненіе (α) приводится къ одному изъ слѣдующихъ уравненій:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\vartheta)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad \ldots\ldots (\iota)$$

Уравненіе (ϑ) не удовлетворяется никакими вещественными значеніями x и y. Поверхности, ему соотвѣтствующей, *нѣтъ* **).

Поверхности (ι) суть *цилиндры 2-го порядка* (§ 93).

Аналогичныя уравненіямъ (ϑ) и (ι) получаются изъ (α) уравненія въ предположеніи, что одинъ изъ коэффиціентовъ A_1 и A_2 равенъ нулю.

4) Если $A_2=A_3=0$, и A_1 и D отличны отъ нуля, то уравненіе (α) приводится къ одному изъ уравненій:

$$x^2+a^2=0,\quad x^2-a^2=0.$$

Второе изъ этихъ уравненій распадается на два уравненія 1-й степени

$$x+a=0 \text{ и } x=-a.$$

---

*) Иначе: поверхность (β) *мнимая*.

**) Иначе: поверхность (ϑ) *мнимая*.

Каждое изъ нихъ представляетъ уравненіе плоскости, параллельной плоскости yz (§ 38). Поэтому уравненіе $x^2 - a^2 = 0$ изображаетъ *пару параллельныхъ плоскостей*.

Уравненіе $x^2 + a^2 = 0$ не удовлетворяется никакими вещественными значеніями x, и поверхности, ему соотвѣтствующей, *нѣтъ* *).

Комбинаціи $A_1 = A_2 = 0$ и $A_1 = A_3 = 0$ приводятъ къ аналогичнымъ уравненіямъ и заключеніямъ.

§ 79. **Эллипсоидъ.** Эллипсоидъ опредѣляется уравненіемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

Такъ какъ

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2},$$

то наибольшее значеніе $\frac{x^2}{a^2}$ есть 1, т.-е. для всѣхъ точекъ эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$ или $|x| \leqslant a$.

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что $|y| \leqslant b$ и $|z| \leqslant c$.

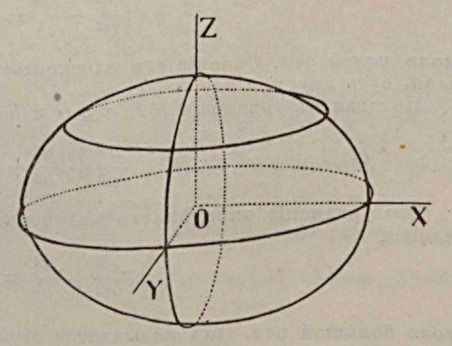
Изъ этого слѣдуетъ, что эллипсоидъ есть поверхность, лежащая всѣми точками внутри прямоугольнаго параллелепипеда, гранями котораго служатъ плоскости

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c.$$

a, b и c называются *полуосями* эллипсоида.

Чтобы составить себѣ понятіе о формѣ эллипсоида, разсмотримъ сѣченія его плоскостями координатъ и плоскостями, имъ параллельными.

Сѣченія эллипсоида плоскостями xy ($z = 0$), zx ($y = 0$) и yz ($x = 0$) суть соотвѣтственно эллипсы (черт. 40):



Черт. 40.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \; \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Плоскость $z = h$, параллельная плоскости xy, пересѣкаетъ эллипсоидъ (52) по эллипсу, уравненіе котораго получается при подстановкѣ h вмѣсто z въ уравненіе (52):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - h^2}{c^2} \text{ или } \frac{x^2}{\frac{a^2(c^2 - h^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(c^2 - h^2)}{c^2}} = 1.$$

---

*) Иначе: уравненіе $x^2 + a^2 = 0$ представляетъ *пару мнимыхъ плоскостей*.

Полуоси этого эллипса суть $\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}$ и $\frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}$. При $|h|<c$ эти выраженія вещественны, т.-е. плоскости $z=h$, гдѣ $|h|<c$, пересѣкаютъ эллипсоидъ по эллипсамъ; при $|h|=c$ полуоси равны нулю, т.-е. эллипсъ обращается въ точку; плоскости $z=\pm c$ суть *касательныя* плоскости. При $|h|>c$ полуоси мнимы, т.-е. плоскости $z=h$, гдѣ $|h|>c$, не пересѣкаютъ эллипсоида.

Аналогичныя заключенія получаются при разсмотрѣніи сѣченій эллипсоида плоскостями, параллельными другимъ плоскостямъ координатъ.

Сѣченія эллипсоида (52) плоскостями координатъ называются *главными сѣченіями*, а вершины эллипсовъ, представляющихъ главныя сѣченія, — *вершинами эллипсоида*.

§ 80. **Эллипсоидъ вращенія.** Если двѣ полуоси эллипсоида равны, то эллипсоидъ называется *эллипсоидомъ вращенія*.

Полагая въ уравненіи (52) $a=b>c$, получимъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Это уравненіе опредѣляетъ *сжатый* эллипсоидъ вращенія, который получается вращеніемъ эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

около *малой* оси. Сѣченіе его плоскостью xy и плоскостями, ей параллельными, суть круги.

Полагая въ уравненіи (52) $a>b$ и $b=c$, находимъ уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Это уравненіе опредѣляетъ эллипсоидъ, который получается вращеніемъ эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

около большой оси. Онъ называется *вытянутымъ* эллипсоидомъ вращенія. Его сѣченія плоскостью yz и плоскостями, ей параллельными, суть круги.

§ 81. **Сфера или шаръ.** Если въ уравненіи (52) положить $a=b=c$, то получимъ уравненіе

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

Это — уравненіе *сферы* или *шара* съ центромъ въ началѣ координатъ и радіусомъ a. Дѣйствительно, первая часть этого уравненія есть квадратъ разстоянія точки (x, y, z) отъ начала координатъ (§ 10), а самое уравненіе указываетъ, что всѣ точки поверхности, изображаемой имъ, находятся на разстояніи a отъ начала координатъ. Слѣд., поверхность (55) есть геометрическое мѣсто точекъ пространства, равно удаленныхъ отъ начала координатъ, т.-е шаръ съ центромъ въ началѣ координатъ.

Можно также разсматривать уравненіе (55), какъ уравненіе поверхности, происшедшей отъ вращенія круга радіуса a около діаметра (§ 79).

§ 82. **Круговыя сѣченія эллипсоида.** Эллипсоидъ (52) пересѣкается плоскостями, вообще, по эллипсамъ. Но существуютъ и такія плоскости, которыя пересѣкаютъ его по кругамъ. Покажемъ это.

Полагая въ уравненіи (52) $a > b > c$, преобразуемъ это уравненіе слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2};$$

$$\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}z^2-\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}x^2=\frac{b^2-(x^2+y^2+z^2)}{b^2} \quad \ldots\ldots\ldots (52')$$

Такъ какъ по предположенію $b^2-c^2>0$ и $a^2-b^2>0$, то первую часть этого уравненія можно разложить на множители:

$$\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}z+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}x \text{ и } \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}z-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}x.$$

Уравненіе (52′), а слѣд., и уравненіе (52), удовлетворяется значеніями x, y, z, удовлетворяющими одной изъ слѣдующихъ двухъ системъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}z+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}x=0\\ x^2+y^2+z^2=b^2\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{bc}z-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}x=0\\ x^2+y^2+z^2=b^2\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Первыя уравненія этихъ системъ представляютъ плоскости, проходящія черезъ ось y (§ 38), а второе уравненіе той и другой системы есть уравненіе шара съ центромъ въ началѣ координатъ и радіусомъ b (§ 80). Поэтому система (α) и система (β) опредѣляютъ сѣченія шара плоскостями, т.-е. круги.

Но эти круги лежатъ и на эллипсоидѣ (52).

Итакъ, плоскости, опредѣляемыя первыми уравненіями системъ (α) и (β), пересѣкаютъ эллипсоидъ по кругамъ.

Не трудно видѣть, что эти плоскости образуютъ съ плоскостью xy углы φ и φ', опредѣляемые уравненіями:

$$tan\varphi=-\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2-c^2}},\quad tan\varphi'=\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2-c^2}},$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что $\varphi=\pi-\varphi'$, т.-е. что разсматриваемыя плоскости симметрично расположены относительно плоскости yz.

Замѣтимъ, что плоскости, параллельныя указаннымъ плоскостямъ, пересѣкаютъ эллипсоидъ также по кругамъ. Такимъ образомъ на эллипсоидѣ имѣются *двѣ системы круговыхъ сѣченій.*

§ 83. **Однополостный гиперболоидъ.** Гиперболоидъ съ одной полостью опредѣляется уравненіемъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots (56)$$

a, b, c называются полуосями гиперболоида.

Разсмотримъ сѣченія гиперболоида плоскостями координатъ (т. н. *главныя* сѣченія) и плоскостями, имъ параллельными.

Плоскость xy ($z=0$) даетъ въ сѣченіи эллипсъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Плоскость $z=h$, параллельная плоскости xy, пересѣкаетъ гиперболоидъ по эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},$$

полуоси котораго суть $\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}$ и $\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$.

Плоскость xz ($y=0$) даетъ въ сѣченіи съ гиперболоидомъ гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

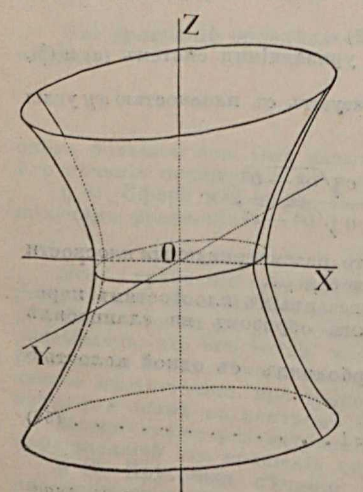
дѣйствительная ось которой совпадаетъ съ осью x, а мнимая — съ осью z; полуоси гиперболы суть a и c.

Плоскость $y=h$, параллельная плоскости xz, пересѣкаетъ гиперболоидъ по гиперболѣ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2},$$

квадраты полуосей которой суть $\frac{a^2}{b^2}(b^2-h^2)$ и $\frac{c^2}{b^2}(b^2-h^2)$.

Если $h^2<b^2$, т.-е. $|h|<b$, то дѣйствительная ось этой гиперболы параллельна оси x, а мнимая—оси z. Если же $h^2>b^2$, т.-е. $|h|>b$, то дѣйствительная ось гиперболы параллельна оси z, а мнимая—оси x. При $h^2=b^2$ предыдущее уравненіе обращается въ уравненіе



Черт. 41.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

распадающееся на два линейныхъ:

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0 \text{ и } \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0.$$

Каждое изъ этихъ уравненій представляетъ плоскость, проходящую черезъ ось y (§ 38). Каждая изъ нихъ вмѣстѣ съ плоскостью $y=h$, гдѣ $h=\pm b$, даетъ прямую. Отсюда заключаемъ, что плоскость $y=b$ въ пересѣченіи съ гиперболоидомъ даетъ пару прямыхъ, пересѣкающихся въ точкѣ $(0, b, 0)$. Точно также сѣченія гиперболоида плоскостью $y=-b$ представляютъ пару прямыхъ, пересѣкающихся въ точкѣ $(0, -b, 0)$.

Сѣченія гиперболоида (56) плоскостью yz ($x=0$) и плоскостями, ей параллельными, суть также гиперболы, за исключеніемъ сѣ-

ченій плоскостями $x = \pm a$, когда вмѣсто гиперболъ получаемъ пары пересѣкающихся прямыхъ.

Зная видъ сѣченій гиперболоида плоскостями координатъ и плоскостями, имъ параллельными, можно составить представленіе о формѣ самой поверхности (черт. 41).

§ 84. **Однополостный гиперболоидъ вращенія.** Если въ уравненіи (56) положить $a = b$, то получимъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

Это уравненіе представляетъ однополостный гиперболоидъ, получаемый вращеніемъ гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

около ея *мнимой* оси. Сѣченія его плоскостями, параллельными плоскости xy, суть круги.

§ 85. **Круговыя сѣченія однополостнаго гиперболоида.** Существованіе на гиперболоидѣ (56) круговыхъ сѣченій можно обнаружить способомъ, указаннымъ въ § 81.

Если $a > b$, то одна пара круговыхъ сѣченій гиперболоида (56) опредѣляется пересѣченіемъ шара

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

съ плоскостями

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ab}\,y \pm \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{ac}\,z = 0 \text{ *)}.$$

§ 86. **Прямолинейныя образующія однополостнаго гиперболоида.** Уравненіе (56) можно замѣнить уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \text{ или } \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Этому послѣднему можно удовлетворить, положивъ или

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\rho\left(1+\frac{y}{b}\right) \text{ и } \rho\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b} \quad \ldots\ldots\ldots (58)$$

или

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\sigma\left(1+\frac{y}{b}\right) \text{ и } \sigma\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b}, \quad \ldots\ldots\ldots (59)$$

гдѣ ρ и σ суть произвольныя числа.

Каждое изъ уравненій (58) опредѣляетъ плоскость (§ 36), а ихъ совокупность—прямую (§ 43). Точно также уравненія (59) опредѣляютъ прямую. Такъ какъ значенія x, y и z, удовлетворяющія уравненіямъ (58) или уравненіямъ (59), удовлетворяютъ и уравненію (56), то прямыя (58) и (59) лежатъ на гиперболоидѣ.

*) Доказательство этого предложенія можетъ служить полезнымъ упражненіемъ.

Уравненія (58) содержатъ перемѣнный параметръ ρ, а уравненія (59)— параметръ σ. Измѣняя ихъ, мы получимъ *двѣ* системы прямыхъ, лежащихъ на гиперболоидѣ. Эти прямыя называются *прямолинейными образующими* гиперболоида. Укажемъ два свойства прямолинейныхъ образующихъ.

Первое свойство таково: *двѣ образующія одной системы не пересѣкаются*, или *черезъ каждую точку гиперболоида проходитъ только одна образующая каждой системы.*

Это слѣдуетъ изъ того, что уравненія (58) опредѣляютъ единственное значеніе для ρ, а уравненія (59)—единственное значеніе для σ, если въ этихъ уравненіяхъ считать данными x, y, z.

Второе свойство состоитъ въ слѣдующемъ: *каждая образующая первой системы пересѣкается съ каждой образующей второй системы.*

Для того, чтобы обнаружить это свойство, нужно доказать совмѣстность четырехъ уравненій (58) и (59) съ тремя неизвѣстными x, y, z (§ 48). Для этого покажемъ, что послѣднее изъ указанныхъ четырехъ уравненій есть слѣдствіе первыхъ трехъ.

Умноживъ первое изъ уравненій (58) на σ, получимъ:

$$\sigma\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\rho\sigma\left(1+\frac{y}{b}\right);$$

отсюда по первому изъ уравненій (59) и второму изъ уравненій (58) находимъ:

$$\sigma\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\rho\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b}.$$

Желаемое такимъ образомъ доказано.

Однополостный гиперболоидъ можно получить движеніемъ прямой.

Дѣйствительно, прямолинейныя образующія одной системы можно разсматривать, какъ различныя положенія движущейся прямой, при чемъ ея движеніе направляется другой системой образующихъ.

Поверхности, образуемыя движеніемъ прямой, называются *линейчатыми*. Однополостный гиперболоидъ есть поверхность линейчатая.

§ 87. **Двуполостный гиперболоидъ.** Двуполостный гиперболоидъ опредѣляется уравненіемъ:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

Разсмотримъ сѣченія этой поверхности плоскостями координатъ и плоскостями, имъ параллельными.

Плоскость zy ($x=0$) не пересѣкаетъ поверхности, такъ какъ при $x=0$ изъ уравненія (60) получимъ уравненіе

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

которому не удовлетворяютъ никакія вещественныя значенія x и y.

Плоскость $x=h$, параллельная плоскости zy, пересѣкаетъ гиперболоидъ (60) только при условіи, что $|h|>a$. Дѣйствительно, полагая $x=h$, изъ уравненія (60) получимъ:

$$\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{a^2}-1\right)}=1.$$

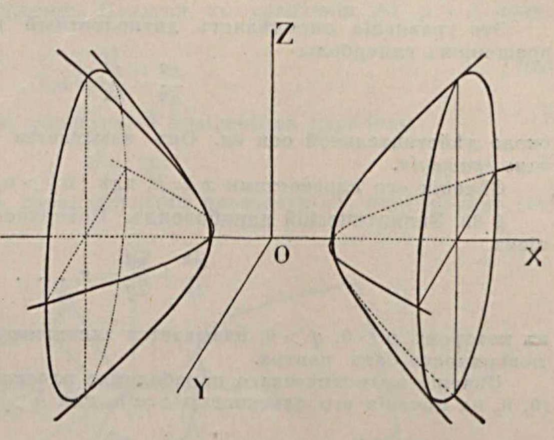
Это уравненіе не удовлетворяется никакими вещественными значеніями y и z, если $h^2 < a^2$, и представляетъ эллипсъ съ полуосями

$$\frac{b}{a}\sqrt{h^2-a^2} \text{ и } \frac{c}{a}\sqrt{h^2-a^2}$$

при $h^2 > a^2$. При $h = \pm a$ изъ уравненія (60) находимъ

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0;$$

это уравненіе удовлетворяется только при $y=0$ и $z=0$.



Черт. 42.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что гиперболоидъ (60) есть поверхность, не имѣющая точекъ между плоскостями $x = \pm a$. Эти двѣ плоскости являются касательными къ гиперболоиду (60) въ точкахъ ($\pm a$, 0,0), называемыхъ *вершинами* гиперболоида.

Плоскости, параллельныя плоскости yz и отстоящія отъ нея больше, чѣмъ на a, пересѣкаютъ гиперболоидъ по эллипсамъ, размѣры которыхъ увеличиваются съ удаленіемъ сѣкущей плоскости отъ плоскости yz.

Гиперболоидъ (60) состоитъ изъ *двухъ* отдѣльныхъ полостей.

Сѣченіе гиперболоида (60) плоскостью xz ($y=0$) есть гипербола

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1,$$

а сѣченіе его плоскостью $y=h$, параллельно плоскости xz, представляетъ гиперболу

$$\frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)}-\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)}=-1.$$

Дѣйствительныя оси этихъ гиперболъ направлены по оси x, а мнимыя— по оси z.

Плоскость xy ($z=0$) и плоскости, ей параллельныя, пересѣкаютъ гиперболоидъ (60) по гиперболамъ, дѣйствительныя оси которыхъ направлены по оси x, а мнимыя—по оси y.

Зная сѣченія гиперболоида (60) плоскостями координатъ и плоскостями, имъ параллельными, можно составить понятіе о формѣ поверхности (черт. 42).

§ 88. **Двуполостный гиперболоидъ вращенія.** Полагая въ уравненіи (60) $c=b$, получимъ:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Это уравненіе опредѣляетъ двуполостный гиперболоидъ, получаемый вращеніемъ гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

около дѣйствительной оси ея. Онъ называется *двуполостнымъ гиперболоидомъ вращенія*.

Сѣченія его плоскостями $x=h$, гдѣ $|h|>a$, суть круги.

§ 89. **Эллиптическій параболоидъ.** Поверхность, опредѣляемая уравненіемъ

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z, \quad \dots\dots\dots\dots (61)$$

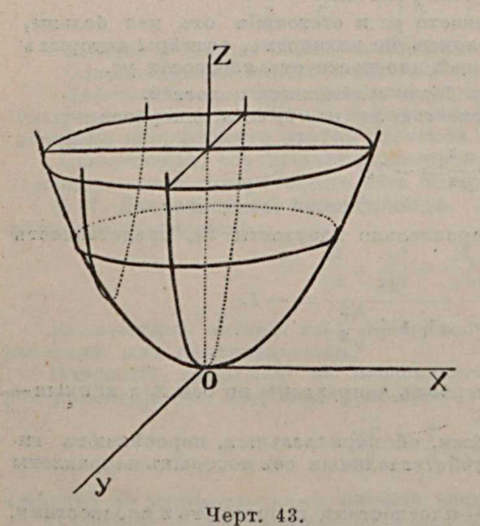
въ которомъ $p>0$, $q>0$, называется *эллиптическимъ параболоидомъ*. Это—поверхность безъ центра.

Сѣченіе эллиптическаго параболоида плоскостью xy $(z=0)$ есть точка $(0, 0, 0)$; сѣченія его плоскостью $z=h$, гдѣ $h>0$, есть эллипсъ

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=h,$$

полуоси котораго суть $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$.

Плоскости $z=h$, гдѣ $h<0$, не пересѣкаютъ поверхности.



Черт. 43.

Эллиптическій параболоидъ (61) представляетъ, слѣд., поверхность, которая проходитъ черезъ начало координатъ и расположена въ области положительныхъ z; плоскость xy служитъ для него касательной плоскостью въ началѣ координатъ; начало координатъ называется *вершиною параболоида* (61).

Плоскость xz $(y=0)$ пересѣкаетъ параболоидъ (61) по параболѣ, опредѣляемой уравненіемъ

$$x^2=2pz;$$

ось этой параболы совпадаетъ съ осью z.

Плоскость $y=h$, параллельная плоскости xz, пересѣкаетъ параболоидъ (61) по параболѣ

$$x^2=2p\left(z-\frac{h^2}{2q}\right),$$

ось которой направлена по оси z, а вершиною служитъ точка $\left(0,\ h,\ \frac{h^2}{2q}\right)$. Параметры параболъ, получаемыхъ въ сѣченіи параболоида (61) плоскостью xz и плоскостями, ей параллельными, одинаковы и равны p.

Аналогичные результаты получаются при разсмотрѣніи сѣченій плоскостями, параллельными плоскости yz $(x=h)$ (черт. 43).

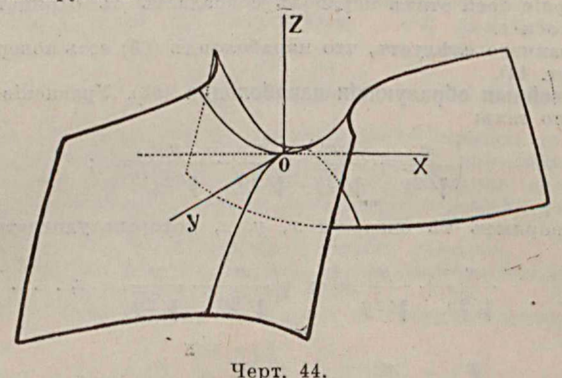
§ 90. **Параболоидъ вращенія.** Полагая въ уравненіи (61) $p = q$, получаемъ уравненіе

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z, \qquad (62)$$

опредѣляющее параболоидъ, образуемый вращеніемъ параболы

$$x^2 = 2pz$$

около ея оси. Плоскостями, параллельными плоскости xy, параболоидъ (62) пересѣкается по кругамъ.



Черт. 44.

§ 91. **Гиперболическій параболоидъ.** Поверхность, опредѣляемая уравненіемъ

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z, \qquad (63)$$

въ которомъ $p > 0$ и $q > 0$, называется *гиперболическимъ параболоидомъ*.

Сѣченія параболоида (63) плоскостью xy ($z = 0$) есть пара прямыхъ

$$\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}} = 0 \text{ и } \frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}} = 0.$$

Сѣченіе его плоскостью $z = h$, параллельною плоскости xy, есть гипербола

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1,$$

которой дѣйствительная ось направлена по оси x, а мнимая—по оси y въ случаѣ $h > 0$ и наоборотъ въ случаѣ $h < 0$.

Плоскость xz ($y = 0$) пересѣкаетъ параболоидъ (63) по параболѣ

$$x^2 = 2pz,$$

ось которой совпадаетъ съ осью z.

Плоскость $y = h$, параллельная плоскости xz, пересѣкаетъ параболоидъ (63) по параболѣ

$$x^2 = 2p\left(z + \frac{h^2}{2q}\right);$$

направленіе оси этой параболы совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ оси z, а вершина ея лежитъ въ точкѣ $\left(0,\ h,\ -\frac{h^2}{2q}\right)$.

Сѣченія параболоида (63) плоскостью yz ($x=0$) и плоскостью $x=h$, ей параллельною, представляютъ соотвѣтственно параболы

$$y^2=-2qz,$$
$$y^2=2q\left(\frac{h^2}{2p}-z\right).$$

Направленіе осей этихъ параболъ совпадаетъ съ отрицательнымъ направленіемъ оси z.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что параболоидъ (63) есть поверхность *сѣдлообразная* (черт. 44).

Прямолинейныя образующія параболоида (63). Уравненіе (63) можетъ быть написано такъ:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2p}}-\frac{y}{\sqrt{2q}}\right)=z;$$

ему удовлетворяютъ тѣ значенія x, y, z, которыя удовлетворяютъ или системѣ

$$\frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}}=\varrho;\quad \varrho\left(\frac{x}{\sqrt{2p}}-\frac{y}{\sqrt{2q}}\right)=z, \quad \ldots \ldots \ldots (64)$$

или системѣ

$$\frac{x}{\sqrt{2p}}-\frac{y}{\sqrt{2q}}=\sigma;\quad \sigma\left(\frac{x}{\sqrt{2p}}+\frac{y}{\sqrt{2q}}\right)=z, \quad \ldots \ldots \ldots (65)$$

гдѣ ϱ и σ суть произвольныя вещественныя числа.

Каждая изъ системъ (64) и (65) опредѣляетъ прямую (§ 43).

Изъ способа полученія уравненій (64) и (65) слѣдуетъ, что обѣ эти прямыя лежатъ на параболоидѣ (63). Разсматривая въ уравненіяхъ (64) и (65) ϱ и σ, какъ перемѣнные параметры, мы заключаемъ, что на параболоидѣ (63) лежатъ *двѣ* системы прямыхъ. Эти прямыя называются *прямолинейными образующими* гиперболическаго параболоида.

Не трудно обнаружить слѣдующія свойства прямолинейныхъ образующихъ параболоида (63):

1) *черезъ каждую точку параболоида проходитъ одна образующая каждой системы*, или *образующія одной системы не пересѣкаютъ другъ друга;*

2) *каждая образующая одной системы пересѣкаетъ каждую образующую другой системы* (см. § 85).

Гиперболическій параболоидъ есть поверхность *линейчатая* (§ 85).

§ 92. **Конусъ второго порядка.** Поверхность, образуемая движеніемъ прямой, проходящей черезъ данную точку и скользящей по данной кривой, называется *конической* поверхностью или *конусомъ*.

Движущаяся прямая называется *образующей* конуса, кривая, по которой скользитъ образующая,—*направляющей*, а точка, черезъ которую проходитъ образующая,—*вершиною*.

Если направляющая есть одна изъ кривыхъ 2-го порядка (§ 71), то конусъ называется *конусомъ второго порядка*.

Уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (66)$$

есть уравненіе конуса второго порядка, имѣющаго вершину въ началѣ координатъ. Дѣйствительно, не трудно убѣдиться въ томъ, что если точка (x_1, y_1, z_1) лежитъ на конусѣ (66), то на ней лежатъ и точки, координаты которыхъ суть kx_1, ky_1, kz_1 гдѣ k есть произвольное число.

Но всѣ эти точки лежатъ на прямой, соединяющей начало координатъ съ точкой (x_1, y_1, z_1) и опредѣляемой уравненіями (§ 44):

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1} \ldots \ldots \ldots \ldots (\alpha)$$

Слѣдовательно, эта прямая лежитъ на поверхности (66).

Сѣченіе поверхности (66) плоскостью $z=h$ $(h\neq 0)$ представляетъ эллипсъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \ldots \ldots \ldots \ldots (\beta)$$

Если брать за точку (x_1, y_1, z_1) точки этого эллипса, то уравненіе (α) дастъ намъ систему прямыхъ, соединяющихъ начало координатъ съ точками эллипса (β) и лежащихъ на поверхности (66). Поэтому поверхность (66) можно получить движеніемъ прямой, проходящей черезъ начало координатъ и скользящей по эллипсу (β).

Слѣд., поверхность (66) есть конусъ второго порядка.

Пересѣкая конусъ второго порядка различными плоскостями, можно получить всѣ кривыя второго порядка (§ 75).

Если въ уравненіи (66) положить $a=b$, то получимъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \ldots \ldots \ldots \ldots (67)$$

опредѣляющее конусъ *вращенія*. Ось z служитъ *осью* вращенія.

§ 93. **Асимптотическій конусъ гиперболоидовъ.** Разсмотримъ конусъ (66) въ связи съ гиперболоидами

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \ldots \ldots \ldots \ldots (56)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \ldots \ldots \ldots \ldots (60')$$

предполагая, что въ уравненіяхъ (56), (60′) и (66) значенія a, b и c одинаковы.

Плоскость $y=0$ въ сѣченіи съ гиперболоидами (56) и (60′) даетъ гиперболы, опредѣляемыя соотвѣтственно уравненіями

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \ldots \ldots \ldots \ldots (\alpha)$$

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \ldots \ldots \ldots \ldots (\beta)$$

а въ сѣченіи съ конусомъ (66)—*пару* прямыхъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \ldots \ldots \ldots \ldots$$

распадающимся на два уравненія первой степени:

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0,\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0 \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma)$$

Гиперболы (α) и (β) суть сопряженныя гиперболы (§ 64), а прямыя (γ) ихъ асимптоты (§ 66).

Такую же связь имѣютъ между собою сѣченія гиперболоидовъ (56) и (60′) и конуса (66) плоскостью $x=0$ и, вообще, плоскостями, проходящими черезъ ось z.

Поэтому конусъ (66) можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто асимптотъ тѣхъ гиперболъ, которыя получаются въ сѣченіяхъ гиперболоидовъ (56) и (60′) плоскостями, проходящими черезъ ось z. Конусъ (66) называется *асимптотическимъ* конусомъ по отношенію къ гиперболоидамъ (56) и (60′). Гиперболоидъ (56) лежитъ *внѣ* конуса (66), а обѣ полости гиперболоида (60′)—*внутри* полостей этого конуса.

§ 94. **Цилиндрическія поверхности 2-го порядка.** Цилиндрической поверхностью или цилиндромъ называется поверхность, образуемая прямой линіей, скользящей по данной кривой параллельно самой себѣ.

Движущаяся прямая называется *образующей*, а кривая, по которой скользитъ прямая,—*направляющей*. Если направляющая есть одна изъ кривыхъ 2-го порядка (§ 71), то цилиндръ называется *цилиндромъ 2-го порядка*.

Въ зависимости отъ того, какая изъ кривыхъ второго порядка служитъ направляющей, цилиндръ второго порядка называется *круглымъ* (направляющая—*кругъ*), *эллиптическимъ* (направляющая—*эллипсъ*), *гиперболическимъ* (направляющая—*гипербола*) и *параболическимъ* (направляющая—*парабола*).

Уравненіе

$$f(x, y) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

разсматриваемое, какъ уравненіе между координатами x, y, z точки въ пространствѣ, есть уравненіе цилиндра, образующія котораго параллельны оси z.

Дѣйствительно, всѣ точки прямой, параллельной оси z, различаются значеніями z и имѣютъ одинаковыя координаты x и y. Если эти послѣднія удовлетворяютъ уравненію (α), то прямая лежитъ на поверхности (α).

Съ другой стороны, уравненіе (α), разсматриваемое, какъ уравненіе между координатами x и y точки на плоскости, даетъ кривую.

Слѣд., уравненіе (α) есть уравненіе геометрическаго мѣста прямыхъ, параллельныхъ оси z и проходящихъ черезъ точки кривой (α), лежащей въ плоскости xy, т.-е. уравненіе цилиндрической поверхности.

Приведемъ уравненія цилиндровъ 2-го порядка съ образующими, параллельными оси z:

(68)....$x^2 + y^2 - a^2 = 0$ уравненіе *круглаго* цилиндра;

(69)....$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ уравненіе *эллиптическаго* цилиндра;

(70)....$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ уравненіе *гиперболическаго* цилиндра;

(71)....$y^2 - 2px = 0$ уравненіе *параболическаго* цилиндра.

Первые три цилиндра (круговой, эллиптическій и гиперболическій) суть поверхности центральныя (§ 77), но съ *неопредѣленнымъ* центромъ. Дѣйствительно, каждая точка прямой, параллельной образующей цилиндра и проходящей черезъ центръ кривой, которая служитъ направляющей, обладаетъ свойствомъ центра (§ 77). Эта прямая называется *осью* цилиндра. Для цилиндровъ (68), (69) и (70) осью служитъ ось z. Возьмемъ на оси z произвольную точку (0, 0, z). Если на кругломъ, эллиптическомъ или гиперболическомъ

цилиндрѣ лежитъ точка $(x, y, z+\zeta)$, то на немъ, какъ видно изъ уравненій (68), (69) и (70), лежитъ и точка $(-x, -y, z-\zeta)$. Средина хорды, соединяющей эти точки, есть точка $(0, 0, z)$ (§ 11). Отсюда слѣдуетъ, что каждую точку оси можно принять за центръ поверхности и назвать цилиндры (68), (69) и (70) поверхностями съ неопредѣленнымъ центромъ.

Параболическій цилиндръ есть поверхность безъ центра.

ГЛАВА IX.

Теорія предѣловъ.

§ 95. **Понятіе о предѣлѣ.** Пусть перемѣнное x измѣняется такъ, что послѣдовательныя значенія его суть

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n, \ldots$$

Если можно найти такое натуральное число p, что для $n \geqslant p$ абсолютное значеніе разности $x_n - a$ значеній перемѣннаго x и нѣкотораго постояннаго числа a будетъ меньше произвольнаго, какъ угодно малаго, положительнаго числа ε, то постоянное число a называется предѣломъ перемѣннаго x, измѣняющагося по данному закону.

Предѣлъ обозначается символомъ lim, поставленнымъ передъ перемѣннымъ: $\lim x = a$. Символъ lim представляетъ три начальныя буквы латинскаго слова *limes* или французскаго *limite*, обозначающихъ предѣлъ.

Опредѣленіе. *Предѣломъ перемѣннаго x называется постоянное число a, къ которому x при своемъ измѣненіи приближается такъ, что, начиная съ извѣстнаго момента измѣненія, абсолютное значеніе разности $x - a$ дѣлается меньше произвольно-малаго положительнаго числа ε.*

Въ символахъ это опредѣленіе выразится такъ:

$$\lim x = a, \text{ если } |x - a| < \varepsilon.$$

Для поясненія сказаннаго разсмотримъ примѣры.

Примѣръ 1. *Показать, что предѣлъ перемѣннаго x, послѣдовательныя значенія котораго выражаются числами*

$$0{,}1;\ 0{,}11;\ 0{,}111; \ldots,$$

равенъ $1/9$.

Замѣтивъ, что

$$\frac{1}{9}-0{,}1=\frac{1}{9.10}<\frac{1}{10};\ \frac{1}{9}-0{,}11=\frac{1}{9.100}<\frac{1}{100};\ldots;$$

$$\frac{1}{9}-0{,}\overbrace{11\ldots1}^{n\ \text{цифръ}}=\frac{1}{9.10^n}<\frac{1}{10^n},$$

легко видѣть, что разность $1/9-x$ можетъ сдѣлаться меньше произвольно-малаго положительнаго ε при достаточно большомъ числѣ десятичныхъ знаковъ, взятыхъ въ періодической дроби 0,11... Слѣд., предѣлъ данной послѣдовательности равенъ 1/9.

Примѣръ 2. *Показать, что перемѣнное x, послѣдовательныя значенія котораго суть числа*

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\ \frac{1}{n},\ldots\quad (n\text{—натуральное число})$$

имѣетъ предѣломъ нуль.

Дробь $1/n$, гдѣ n цѣлое положительное число, съ возрастаніемъ n неограниченно убываетъ и можетъ при достаточно большомъ n сдѣлаться меньше произвольно-малаго положительнаго числа ε. Слѣд., и разность $x-0$ можетъ сдѣлаться меньше этого числа. Поэтому $\lim x=0$.

Примѣръ 3. *Показать, что перемѣнное x, послѣдовательныя значенія котораго суть числа*

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ldots,\ \frac{n}{n+1},\ldots,\quad (n\text{ — натуральное число})$$

имѣетъ предѣломъ 1.

Разность $1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$ можно сдѣлать меньше произвольно-малаго числа ε, взявъ достаточно большое значеніе для n (см. примѣръ 2). Слѣд., $\lim x=1$.

§ 96. **Безконечно-малое число.** *Перемѣнное число, имѣющее предѣломъ нуль, называется безконечно-малымъ.*

Если x есть безконечно-малое, то $|x|<\varepsilon$, гдѣ ε есть произвольно-малое положительное число (§ 95).

Изъ опредѣленій предѣла (§ 95) и безконечно-малаго числа слѣдуетъ, что, если $\lim x=a$, то перемѣнное x можно представить въ видѣ суммы предѣла и безконечно-малаго:

$$x=a+\alpha,$$

гдѣ $\lim\alpha=0$, т.-е. α есть безконечно-малое число.

§ 97. **Безконечно-большое число.** *Перемѣнное число* x, *абсолютное значеніе котораго, начиная съ извѣстнаго момента измѣненія, становится больше произвольнаго, напередъ заданнаго положительнаго числа, называется безконечно-большимъ.*

Въ символахъ это опредѣленіе выражается такъ: *если* $|x| > A$, *гдѣ* A *произвольное положительное число, то* $\lim x = \infty$.

Примѣчаніе. Постоянное число, отличное отъ нуля, и перемѣнныя, предѣлы которыхъ отличны отъ нуля и безконечности, называются *конечными.*

§ 98. **Теоремы о безконечно-малыхъ.** 1. *Сумма конечнаго числа безконечно-малыхъ есть безконечно-малое.*

Пусть имѣемъ n (n — натуральное число) безконечно-малыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Нужно доказать, что ихъ сумма есть также безконечно-малое число.

Обозначивъ черезъ ε произвольное положительное число, по опредѣленію безконечно-малыхъ (§ 96), имѣемъ:

$$|x_1| < \frac{\varepsilon}{n};\ |x_2| < \frac{\varepsilon}{n}; \ldots;\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Сложивъ эти неравенства почленно, получимъ:

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| < \varepsilon.$$

Но изъ правилъ сложенія положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ слѣдуетъ, что

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

Слѣд.,

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| < \varepsilon,$$

т.-е. сумма $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ есть безконечно-малое число (§ 96).

2. *Разность двухъ безконечно-малыхъ есть безконечно-малое.*

Если x_1 и x_2 суть два безконечно-малыхъ числа, то (§ 96)

$$|x_1| < \frac{\varepsilon}{2},\ |x_2| < \frac{\varepsilon}{2},$$

гдѣ ε произвольно-малое положительное число.

Изъ этихъ неравенствъ находимъ, что

$$|x_1| + |x_2| < \varepsilon.$$

Но $$|x_1 - x_2| = |x_1 + (-x_2)| \leqslant |x_1| + |x_2|.$$

Слѣд., $|x_1 - x_2| < \varepsilon$, т.-е. $x_1 - x_2$ есть безконечно-малое.

3. *Произведеніе конечнаго числа на безконечно-малое есть безконечно-малое.*

Пусть m есть конечное число, а x безконечно-малое. Нужно доказать, что mx есть безконечно малое.

Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда m есть *цѣлое положительное* число. Обозначая черезъ ε произвольно-малое положительное число, по опредѣленію § 96 имѣемъ

$$|x| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Отсюда черезъ умноженіе на m получаемъ $m|x| < \varepsilon$ или $|mx| < \varepsilon$, что и доказываетъ теорему.

Положимъ теперь, что m есть положительное не цѣлое число. Обозначивъ черезъ n наибольшее цѣлое число, содержащееся въ m, имѣемъ:

$$n < m < n + 1.$$

По опредѣленію § 96

$$|x| < \frac{\varepsilon}{n+1},$$

откуда

$$|mx| < \frac{m}{n+1}\varepsilon < \varepsilon,$$

такъ какъ $m/(n+1) < 1$.

Для случая $m < 0$ доказательство теоремы отличается отъ приведеннаго только тѣмъ, что вмѣсто m нужно взять его абсолютное значеніе.

Слѣдствіе. *Произведеніе безконечно-малыхъ чиселъ есть безконечно-малое.*

4. *Частное отъ дѣленія безконечно-малаго числа на конечное есть безконечно-малое.*

Такъ какъ дѣленіе на m можно замѣнить умноженіемъ на $1/m$, то эта теорема является слѣдствіемъ предыдущей.

§ 99. **Предѣлъ суммы и разности.** *Предѣлъ суммы* **конечнаго** *числа перемѣнныхъ равенъ суммѣ ихъ предѣловъ. Предѣлъ разности двухъ перемѣнныхъ равенъ разности ихъ предѣловъ.*

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n перемѣнныхъ, имѣющихъ предѣлами соотвѣтственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Требуется доказать, что

$$1)\ \lim(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n;$$
$$2)\ \lim(x_1 - x_2) = a_1 - a_2.$$

Обозначивъ черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ безконечно-малыя, имѣемъ (§§ 95 и 96):

$$x_1 = a_1 + \alpha_1;\ x_2 = a_2 + \alpha_2; \ldots;\ x_n = a_n + \alpha_n.$$

Отсюда черезъ сложеніе находимъ:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).$$

Такъ какъ (§ 98, 1) $\lim\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 0$, то (§§ 95 и 96)

$$\lim\ (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Точно также изъ выраженій x_1 и x_2 черезъ ихъ предѣлы находимъ, что $x_1 - x_2 = (a_1 - a_2) + (\alpha_1 - \alpha_2)$, откуда $\lim\ (x_1 - x_2) = a_1 - a_2$.

§ 100. **Предѣлъ произведенія.** *Предѣлъ произведенія двухъ перемѣнныхъ равенъ произведенію ихъ предѣловъ.*

Нужно доказать, что $\lim\ x_1 x_2 = a_1 a_2$ (обозначенія предыдущаго §).

Заключеніе вытекаетъ изъ того, что

$$x_1 x_2 = (a_1 + \alpha_1)\ (a_2 + \alpha_2) = a_1 a_2 + (a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2)$$

и сумма $a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$ есть безконечно-малое (§ 98, 3, 1).

Теорему не трудно распространить на случай произвольнаго *конечнаго* числа множителей.

Слѣдствіе. *Предѣлъ цѣлой положительной степени перемѣннаго равенъ той же степени его предѣла:*

$$\lim x^m = (\lim x)^m,\ (m \text{ — натуральное число}).$$

§ 101. **Предѣлъ частнаго.** *Предѣлъ частнаго двухъ перемѣнныхъ чиселъ равенъ частному ихъ предѣловъ.*

Нужно доказать, что $\lim \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{a_1}{a_2}$, при чемъ предполагается, что $a_2 \neq 0$.

Такъ такъ (§ 96) $x_1 = a_1 + \alpha_1$ и $x_2 = a_2 + \alpha_2$, то

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1 + \alpha_1}{a_2 + \alpha_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 + \alpha_1}{a_2 + \alpha_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2}{a_2(a_2 + \alpha_2)}.$$

Разность $a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2$ есть безконечно-малое (§ 98, 3, 2); произведеніе $a_2(a_2 + \alpha_2)$ — число конечное. Слѣд., дробь $(a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2)/a_2(a_2 + \alpha_2)$ есть безконечно-малое число (§ 98, 4). Поэтому предыдущее равенство приводитъ къ заключенію (§§ 95 и 96):

$$\lim\ (x_1/x_2) = a_1/a_2.$$

Слѣдствіе. *Предѣлъ цѣлой отрицательной степени конечнаго перемѣннаго числа равенъ той же степени его предѣла.*

§ 102. **Предѣлы возрастающихъ и убывающихъ перемѣнныхъ чиселъ.** *Если перемѣнное при своемъ измѣненіи постоянно возрастаетъ, но всегда остается меньше опредѣленнаго числа, то оно стремится къ предѣлу, не меньшему каждаго изъ его значеній.*

Если перемѣнное при своемъ измѣненіи постоянно убываетъ, но всегда остается больше опредѣленнаго числа, то оно стремится къ предѣлу, не большему каждаго изъ его значеній.

Эти два предложенія мы примемъ безъ доказательства *).

§ 103. **Предѣльное значеніе функціи.** Подставляя въ выраженіе какой-нибудь функціи $f(x)$ перемѣннаго x различныя значенія перемѣннаго, мы получаемъ *значенія функціи* для этихъ значеній перемѣннаго.

Когда же мы разсматриваемъ процессъ измѣненія перемѣннаго x при стремленіи его къ извѣстному предѣлу, то относительно функціи возникаетъ вопросъ о *предѣльномъ ея значеніи* (короче, о ея *предѣлѣ*), т.-е. о томъ значеніи, къ которому она стремится при стремленіи x къ предѣлу.

При $x=a$ значеніе функціи $f(x)$ есть $f(a)$; предѣльное значеніе функціи при стремленіи x къ a есть $\lim\limits_{x=a} f(x)$. Два числа $f(a)$ и $\lim\limits_{x=a} f(x)$, вообще говоря, *различны*.

Для поясненія сказаннаго разсмотримъ функцію

$$f(x)=\frac{x^2-a^2}{x-a};$$

ея значеніе при $x=a$ представляется въ видѣ $\frac{0}{0}$, т.-е. является *неопредѣленнымъ;* предѣльное же значеніе этой функціи при $x=a$ равно $2a$. Дѣйствительно, полагая $x=a+h$, гдѣ $|h|$ можетъ быть числомъ какъ угодно малымъ, но не равнымъ нулю, находимъ

$$f(a+h)=\frac{(a+h)^2-a^2}{(a+h)-a}=\frac{h(2a+h)}{h}=2a+h.$$

Отсюда

$$f(a+h)-2a=h.$$

---

*) Желающіе ознакомиться съ нимъ могутъ найти его, напр., въ книгахъ: *J. Tannery,* Introduction à la théorie des fonctions d'une variable; *Г. Ковалевскій.* Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій; *E. Fabry.* Traité de mathématiques générales; *А. К. Власовъ.* Курсъ высшей математики. Т. I.

Взявъ $|h| < \varepsilon$, гдѣ ε есть произвольно-малое положительное число, получимъ

$$|f(a+h) - 2a| < \varepsilon,$$

т.-е. (§ 95)

$$\lim_{x=a} f(x) = 2a.$$

Значеніе функціи при $x=a$ и ея предѣльное значеніе при стремленіи x къ a совпадаютъ, если *данная функція непрерывна при* $x=a$.

Въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію непрерывности функціи при $x=a$ имѣемъ (§ 16):

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Отсюда по опредѣленію предѣла (§ 95) заключаемъ, что

$$\lim_{x=a} f(x) = f(a).$$

§ 104. Примѣры на вычисленіе предѣловъ.

Примѣръ 1. $\lim\limits_{x=a} \dfrac{x^m - a^m}{x-a} = ma^{m-1}$ для всѣхъ раціональныхъ значеній m.

Разсмотримъ отдѣльно три случая: a) m есть *цѣлое* и *положительное* число; b) m есть *дробное* и *положительное* число; c) m есть *отрицательное* цѣлое или дробное число.

a) m — цѣлое и положительное число. Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно изъ алгебры*),

$$(x^m - a^m)/(x-a) = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

Отсюда (§§ 99, 100)

$$\lim_{x=a} \frac{x^m - a^m}{x-a} = \lim_{x=a} \left\{ x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1} \right\} =$$

$$= \lim_{x=a} x^{m-1} + \lim_{x=a} (ax^{m-2}) + \ldots + \lim_{x=a} (a^{m-2}x) + a^{m-1} =$$

$$= a^{m-1} + a^{m-1} + \ldots + a^{m-1} = ma^{m-1}.$$

b) $m = p/q$, гдѣ p и q цѣлыя положительныя числа. Въ этомъ случаѣ

$$\frac{x^m - a^m}{x-a} = \frac{x^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{x-a}.$$

---

*) См., напр., *С. П. Виноградовъ.* Повторительный курсъ алгебры, § 137.

Полагая $x^{\frac{1}{q}}=z$ и $a^{\frac{1}{q}}=b$, находимъ:

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=\frac{z^p-b^p}{z^q-b^q}=\frac{z^p-b^p}{z-b}\Big/\frac{z^q-b^q}{z-b}.$$

Переходя къ предѣлу и замѣчая, что $\lim\limits_{x=a} z=b$, получаемъ (§ 101):

$$\lim_{x=a}\frac{x^m-a^m}{x-a}=\left(\lim_{z=b}\frac{z^p-b^p}{z-b}\right)\Big/\left(\lim_{z=b}\frac{z^q-b^q}{z-b}\right).$$

Но предѣлы, стоящіе въ числителѣ и знаменателѣ второй части равенства, по доказанному, соотвѣтственно равны pb^{p-1} и qb^{q-1} слѣд.,

$$\lim_{x=a}\frac{x^m-a^m}{x-a}=pb^{p-1}/qb^{q-1}=\frac{p}{q}b^{p-q}=mb^{q(m-1)}=ma^{m-1}.$$

c) $m=-n$, гдѣ n есть число положительное. Такъ какъ

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=\frac{x^{-n}-a^{-n}}{x-a}=\frac{1}{a^nx^n}\frac{a^n-x^n}{x-a}=-\frac{1}{a^nx^n}\frac{x^n-a^n}{x-a},$$

то (§ 100 и предыдущіе случаи настоящаго §)

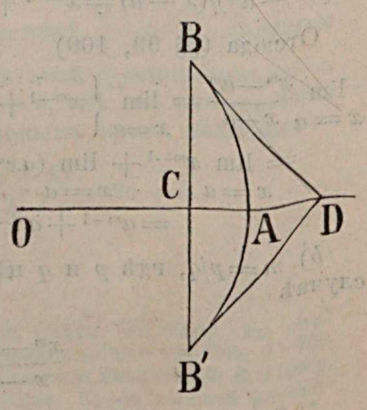
$$\lim_{x=a}\frac{x^m-a^m}{x-a}=-\lim_{x=a}\frac{1}{x^na^n}\frac{x^n-a^n}{x-a}=-\frac{1}{a^{2n}}na^{n-1},$$

или
$$\lim_{x=a}\frac{x^m-a^m}{x-a}=ma^{m-1}.$$

Примѣръ 2. Показать, что

$$\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пусть AB (черт. 45) есть дуга круга радіуса R и x ея мѣра. Построивъ линію CB синуса этой дуги и линію BD тангенса, продолжимъ линію синуса до вторичнаго пересѣченія въ точкѣ B' съ дугой и соединимъ точку B' съ точкой D. Разсматривая прямую BB', дугу BAB' и ломаную BDB', находимъ:



Черт. 45.

$$BB'<\overset{\frown}{BAB'}<BD+DB'.$$

Но легко видѣть, что

$$BB' = 2CB;\ \widehat{BAB'} = 2\widehat{AB};\ BD + DB' = 2BD;$$

поэтому, сокративъ предыдущія неравенства на 2, получимъ:

$$CB < \widehat{AB} < BD.$$

Раздѣливъ эти неравенства на R, находимъ

$$\frac{CB}{R} < \frac{\widehat{AB}}{R} < \frac{BD}{R}.$$

Такъ какъ

$$\frac{\widehat{AB}}{R} = x,\ \frac{CB}{R} = \sin x,\ \frac{BD}{R} = \tan x,$$

то при $x > 0$

$$\sin x < x < \tan x.$$

Отсюда черезъ дѣленіе на $\sin x$ получимъ

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Изъ этихъ неравенствъ слѣдуетъ, что

$$\frac{x}{\sin x} - 1 < \frac{1}{\cos x} - 1 \text{ или } \frac{x}{\sin x} - 1 < \frac{1 - \cos x}{\cos x} \quad . \ . \ . \quad (\alpha)$$

но $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2.\frac{x}{2}$ или $1 - \cos x < x$. Отсюда слѣдуетъ, что $\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$ и что при уменьшеніи x дробь $(1 - \cos x)/\cos x$ можетъ сдѣлаться меньше любого даннаго положительнаго числа ε. Поэтому изъ неравенства (α) заключаемъ, что уменьшеніемъ x можно достигнуть того, что осуществится неравенство

$$\frac{x}{\sin x} - 1 < \varepsilon,$$

гдѣ ε есть произвольно-малое положительное число. Отсюда находимъ (§ 95):

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Такъ какъ

$$\frac{sin\,x}{x} = \frac{1}{\frac{x}{sin x}},$$

то (§ 101)

$$\lim_{x=0} \frac{sin x}{x} = 1.$$

Если $x < 0$, то, положивъ $x = -x'$, гдѣ $x' > 0$, найдемъ:

$$\frac{sin\,x}{x} = \frac{sin\,(-x')}{-x'} = \frac{sin x'}{x'};$$

слѣд., и для $x < 0$ $\lim_{x=0} \frac{sin\,x}{x} = 1.$

Примѣръ 3. *Доказать, что сумма*

$$s = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

при безграничномъ возрастаніи числа ея членовъ стремится къ опредѣленному предѣлу.

Обозначимъ черезъ s_{n+1} сумму $n+1$ первыхъ слагаемыхъ:

$$s_{n+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{2}{1.2\ldots n}.$$

Такъ какъ

$$\frac{1}{1.2.3} < \frac{1}{2^2}, \frac{1}{1.2.3.4} < \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{1.2\ldots n} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

то

$$s_{n+1} < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Слагаемыя правой части этого неравенства, начиная со второго, представляютъ послѣдовательные члены убывающей геометрической прогрессіи, первый членъ которой равенъ 1 и знаменатель равенъ $^1/_2$. Прибавляя во вторую часть сумму

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots,$$

мы усиливаемъ неравенство, такъ что

$$s_{n+1} < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$$

Суммируя безконечно убывающую прогрессію, входящую во вторую часть этого неравенства, находимъ, что при всякомъ n

$$s_{n+1} < 3.$$

Итакъ, данная сумма при возрастаніи числа ея членовъ всегда остается меньше 3. Но она возрастаетъ съ возрастаніемъ числа слагаемыхъ, такъ какъ всѣ ея слагаемыя положительны. Слѣд., она стремится къ нѣкоторому предѣлу, меньшему 3 (§ 102). Этотъ предѣлъ обозначается буквой e.

Такъ какъ, ограничиваясь только двумя первыми членами суммы s, мы уменьшаемъ ее, то число e больше 2. Итакъ,

$$2 < e < 3.$$

Взявъ сумму $n+1$ первыхъ слагаемыхъ, мы получимъ приближенное значеніе числа e. Чтобы оцѣнить степень этого приближенія, разсмотримъ сумму R_{n+1} отбрасываемыхъ членовъ:

$$R_{n+1} = \frac{1}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{1}{1.2\ldots(n+2)} + \frac{1}{1.2\ldots(n+3)} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots n}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right\}$$

Такъ какъ

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{(n+1)^2}; \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{1}{(n+1)^3}; \ldots,$$

и

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots = \frac{1}{n},$$

то

$$R_{n+1} < \frac{1}{1.2\ldots n} \cdot \frac{1}{n}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Это неравенство рѣшаетъ вопросъ о степени точности взятаго приближенія.

Найдемъ, напр., то приближенное значеніе числа e, которое доставляетъ сумма первыхъ 6 членовъ:

$$s_6 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5}.$$

Опредѣлимъ сначала степень точности результата, получаемаго при этомъ вычисленіи. Такъ какъ $1/(1.2.3.4.5).5=1/600$, то $R_6<1/600<0{,}01$, т.-е. s_6 даетъ приближенное значеніе e съ точностью до 0,01 или съ двумя десятичными знаками.

Вычисляемъ затѣмъ отдѣльно члены s_6, выражая ихъ въ десятичныхъ дробяхъ и принимая во вниманіе, что въ результатѣ всего вычисленія придется удержать только два десятичныхъ знака:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=2{,}5$$

$$\frac{1}{1.2.3}=0{,}166$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}=0{,}041$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5}=0{,}008$$

$$s_6=2{,}715.$$

Итакъ, $e=2{,}71$ съ недостаткомъ и съ точнсстью до 0,01.

s_{13} даетъ для e значеніе 2,7182818; болѣе точныя вычисленія даютъ для e число 2,7182818284...

Неравенство (β) показываетъ, что

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\vartheta}{n}, \quad . \; . \; . \quad (\gamma)$$

гдѣ $$0<\vartheta<1.$$

При помощи этой формулы можно доказать, что e есть число *ирраціональное*. Въ самомъ дѣлѣ оно не можетъ быть *цѣлымъ* числомъ, потому что, какъ было показано выше, оно заключается между числами 2 и 3. Оно не можетъ равняться и *раціональной дроби* a/b, гдѣ a и b суть цѣлыя числа. Дѣйствительно, если бы $e=a/b$, то по формулѣ (γ) мы имѣли бы равенство:

$$\frac{a}{b}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots b}\cdot\frac{\vartheta}{b}, \; (0<\vartheta<1).$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на $1.2\ldots b$, мы получили бы равенство вида

$$M=N+\frac{\vartheta}{b},$$

гдѣ M и N суть цѣлыя числа. Равенство это невозможно, такъ какъ $\vartheta/b<1$.

Примѣчаніе. Ирраціональныя числа раздѣляются на два класса: къ первому принадлежатъ такія, которыя служатъ корнями алгебраическаго уравненія съ *цѣлыми* коэффиціентами; ко вторымъ—тѣ, которыя этимъ свойствомъ не обладаютъ. Первыя называются *алгебраическими*, а вторыя—*трансцендентными*.

Примѣромъ алгебраическихъ ирраціональныхъ чиселъ можетъ служить число $\sqrt{2}$, удовлетворяющее уравненію: $x^2-2=0$.

Числа e и π (отношеніе окружности къ діаметру) суть числа *трансцендентныя* *).

Примѣръ 4. *Показать, что*

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Предположимъ сначала, что n есть число *цѣлое* и *положительное*. По формулѣ бинома Ньютона имѣемъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)..[n-(n-1)]}{1.2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Второй членъ второй части этого равенства равенъ 1; остальные члены можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!};$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!};$$

. . . .

$$\frac{n(n-1)..[n-(n-1)]}{1.2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}=\frac{n(n-1)..[n-(n-1)]}{n^n}\cdot\frac{1}{n!}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!},$$

гдѣ $n!=1.2\ldots n$.

---

*) Доказательство трансцендентности чиселъ e и π см. въ книгѣ: *Веберъ* и *Вельштейнъ*. Энциклопедія элементарной математики. Т. I. Изд. «Mathesis», Одесса. 1907.

Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}\,.\,.(\delta)$$

Подставляя въ эту формулу $n+1$ вмѣсто n, находимъ:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!}+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{3!}+\ldots+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!}.$$

Во второмъ изъ написанныхъ разложеній число членовъ на единицу больше, чѣмъ въ первомъ; кромѣ того члены второго разложенія, начиная съ третьяго, больше соотвѣтственныхъ членовъ перваго разложенія, такъ какъ

$$1-\frac{1}{n+1}>1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{2}{n+1}>1-\frac{2}{n},\ldots,\ 1-\frac{n-1}{n+1}>1-\frac{n-1}{n}.$$

Слѣд.,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

т.-е. при возрастаніи n функція $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *увеличивается*.

Но изъ равенства (δ) видно, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

или (см. примѣръ 3)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e.$$

Отсюда на основаніи теоремы § 102 выводимъ заключеніе, что при неограниченномъ возрастаніи n функція $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится къ предѣлу, не превышающему числа e.

Съ другой стороны, если p есть опредѣленное цѣлое число, *меньшее* n, то изъ разложенія (δ) имѣемъ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{p!}.$$

Вторая часть этого неравенства содержитъ $p+1$ членовъ и при возрастаніи n до ∞ стремится къ суммѣ (§§ 101, 99, 100):

$$e_p = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{p!}.$$

Изъ предыдущаго неравенства слѣдуетъ, что предѣлъ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n=\infty$ не меньше e_p. Итакъ

$$e_p \leq \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

Но разность $e-e_p$ можетъ быть сдѣлана меньше любого даннаго числа посредствомъ надлежащаго выбора числа p (см. прим. 3). Слѣд.,

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Покажемъ, что это заключеніе остается справедливымъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда n, измѣняясь, принимаетъ *дробныя* и *отрицательныя* значенія.

Пусть n есть *дробное* положительное число. Обозначивъ черезъ m и $m+1$ *цѣлыя* числа, изъ которыхъ первое *не больше*, а второе *больше* n, имѣемъ слѣдующія неравенства:

$$m \leq n < m+1;\ \frac{1}{m} \geq \frac{1}{n} > \frac{1}{m+1};$$

$$1+\frac{1}{m} \geq 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{m+1}.$$

Отсюда

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m.$$

Такъ какъ при возрастаніи n до ∞ числа m и $m+1$ также возрастаютъ до ∞, то

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} \geq \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}.$$

Но, по предыдущему,

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right) = e.1 = e;$$

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} = \frac{\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$

Слѣдовательно,

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Пусть n есть *отрицательное* число, абсолютное значеніе котораго равно m, такъ что $n=-m$.

Такъ какъ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m} = \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}.\left(1+\frac{1}{m-1}\right),$$

то

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}.\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right) = e\,1 = e.$$

Упражненія.

1. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{2x^2+3x^3+4x^4}{3x^2+x^4+x^6} = \dfrac{2}{3}$.

2. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{2x^3+3x^4+x^5}{3x^2+x^4+x^5} = 0$.

3. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{2x+3x^2+4x^3}{3x^2+x^4+x^6} = \infty$.

4. $\lim\limits_{x=o} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1}{2}$.

5. $\lim\limits_{x=a} \frac{x^2-\sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax}-a} = 3a$.

6. $\lim\limits_{x=1} \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3} = -\frac{3}{2}$.

7. $\lim\limits_{h=o} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = 3x^2$.

8. $\lim\limits_{x=o} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

9. $\lim\limits_{x=o} \frac{tan\,x}{x} = 1$.

10. $\lim\limits_{x=o} \frac{sin\,2x}{x} = 2$; $\lim\limits_{x=o} \frac{tan\,2x}{x} = 2$.

11. $\lim\limits_{x=o} \frac{1-cos x}{sin^2 x} = \frac{1}{2}$.

12. $\lim\limits_{x=o} \frac{tan x - sin x}{sin^3 x} = \frac{1}{2}$.

13. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{1-sin x}{\pi-2x} = 0$.

14. $\lim\limits_{x=1} \frac{arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$.

15. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{4}} \frac{sin x - cos x}{1-tan x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

16. $\lim\limits_{n=\infty} \left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right] = \frac{1}{2}$

17. $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$.

ГЛАВА X.

Производная функціи. Дифференцированіе функцій.

§ 105. **Производная функціи.** Пусть $y = f(x)$ есть *непрерывная* функція перемѣннаго x. Если Δx и Δy обозначаютъ соотвѣтственныя приращенія перемѣннаго и функціи, то отношеніе $\Delta y/\Delta x$ выражаетъ *среднюю* скорость измѣненія функціи при измѣненіи перемѣннаго отъ значенія x до $x + \Delta x$. Когда $|\Delta x|$ уменьшается и стремится къ нулю, то и $|\Delta y|$, вслѣдствіе непрерывности функціи y, также стремится къ нулю. Предѣлъ, къ которому стремится при этомъ отношеніе $\Delta y/\Delta x$, если онъ существуетъ, представляетъ скорость измѣненія функціи для даннаго значенія x перемѣннаго *).

Опредѣленіе. *Предѣлъ отношенія $\Delta y/\Delta x$ приращенія Δy функціи y къ приращенію Δx перемѣннаго x при $\Delta x = 0$ называется* **производной** *функціи y.*

Производная функціи обозначается или присоединеніемъ значка $'$ къ обозначенію функціи, или постановкой передъ данной функціей знака $\frac{d}{dx}$. Если данная функція есть y, то производная ея обозначается или черезъ y', или черезъ $\frac{dy}{dx}$ (читать: *dy по dx*); производная функціи $f(x)$ обозначается или черезъ $f'(x)$, или черезъ $\frac{df(x)}{dx}$ (читать: *df(x) по dx*).

Знакъ $\frac{d}{dx}$ указываетъ своей формой дроби на опредѣленіе производной, какъ предѣла *отношенія*, а буква d напоминаетъ, что членами этого отношенія служатъ *разности* (*differentia*) измѣненныхъ и начальныхъ значеній перемѣннаго и функціи.

Операція взятія производной называется *дифференцированіемъ*.

Примѣръ. Вычислимъ производную функціи x^2. Обозначивъ ее черезъ y, имѣемъ:

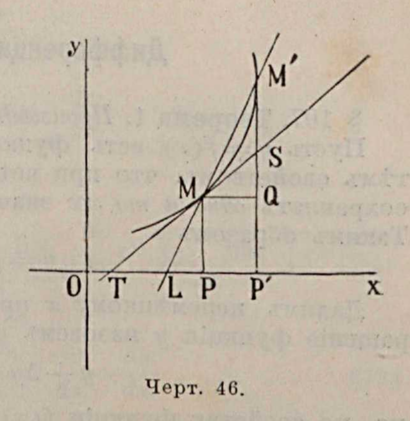
$$y = x^2;\ y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2;$$
$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x;\quad \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x.$$

$$\text{Итакъ, } \frac{d(x^2)}{dx} = 2x.$$

---

*) Ср. съ понятіемъ *скорости* движенія.

§ 106. **Геометрическое значеніе производной.** Пусть $y=f(x)$ есть непрерывная функція x. Принимая x и y за прямоугольныя координаты точки на плоскости, построимъ кривую, уравненіе которой есть $y=f(x)$. Возьмемъ на кривой точку $M(x,y)$ (черт. 46) и точку $M'(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$; опустивъ изъ точекъ M и M' перпендикуляры на ось x и проведя сѣкущую MM' и прямую $MQ \parallel Ox$ до встрѣчи съ перпендикуляромъ изъ точки M', получимъ прямоугольный треугольникъ MQM', изъ котораго имѣемъ:



Черт. 46.

$$\tan \widehat{QMM'}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

или, такъ какъ

$$\widehat{QMM'}=\widehat{xLM},$$

$$\tan \widehat{xLM}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Будемъ точку M' передвигать по кривой такъ, чтобы она приближалась къ M; сѣкущая MM' будетъ при этомъ вращаться около точки M и приближаться къ касательной къ кривой въ точкѣ M, а уголъ xLM приближаться къ углу φ между касательной и осью x. Въ предѣлѣ, когда точка M' совпадетъ съ M, сѣкущая обратится въ касательную, а уголъ xLM обратится въ уголъ φ. Слѣдовательно,

$$\lim \tan \widehat{xLM}=\tan\varphi=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

или

$$\tan\varphi=\frac{dy}{dx}.$$

Эта формула указываетъ намъ геометрическое значеніе производной.

Дифференцированіе функцій.

§ 107. **Теорема 1.** *Производная постоянной величины равна нулю.*

Пусть $y=f(x)$ есть функція *) перемѣннаго x, обладающая тѣмъ свойствомъ, что при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго x она сохраняетъ *одно и то же* значеніе, которое назовемъ черезъ C. Такимъ образомъ

$$y=f(x)=C.$$

Дадимъ перемѣнному x приращеніе Δx, соотвѣтственное приращеніе функціи y назовемъ черезъ Δy. Имѣемъ соотношеніе:

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x);$$

но, по свойству функціи $f(x)$, $f(x+\Delta x)=C$; слѣдовательно,

$$y+\Delta y=C.$$

Вычитая почленно изъ этого равенства равенство $y=C$, находимъ:

$$\Delta y=0.$$

Поэтому отношеніе $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$, а, слѣдовательно, и предѣлъ этого отношенія при $\Delta x=0$ также равенъ нулю. Итакъ,

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=0;$$

но $y=C$; слѣдовательно $\dfrac{dC}{dx}=0$, что и требовалось доказать.

§ 108. **Теорема 2.** *Производная алгебраической суммы равна алгебраической суммѣ производныхъ слагаемыхъ.*

Пусть $y=u+v-w$, гдѣ u, v, w суть функціи x. Давая перемѣнному x приращеніе Δx и называя соотвѣтственныя приращенія функцій y, u, v, w черезъ Δy, Δu, Δv, Δw, получимъ:

$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-(w+\Delta w).$$

Вычитая начальное значеніе функціи, находимъ:

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w.$$

Раздѣлимъ обѣ части равенства на Δx и перейдемъ къ предѣлу при $\Delta x=0$ (§ 99):

*) Подъ словомъ функція здѣсь и въ послѣдующихъ теоремахъ разумѣется *непрерывная* функція.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta v}{\Delta x}-\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta w}{\Delta x};$$

но (§ 105)

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx};\quad \lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx};\quad \lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{dv}{dx};\quad \lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta w}{\Delta x}=\frac{dw}{dx};$$

слѣдовательно,

$$\frac{d(u+v-w)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}\quad\ldots\ldots\ (72)$$

§ 109. **Теорема 3.** *Производная произведенія двухъ функцій равна суммѣ произведеній первой функціи на производную второй и второй на производную первой.*

Пусть $y=u.v$, гдѣ u и v суть функціи x. Давая x приращеніе Δx и обозначая соотвѣтственныя приращенія функцій y, u, v черезъ Δy, Δu, Δv, находимъ:

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\ (v+\Delta v)=uv+u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v.$$

Для приращенія Δy получаемъ:

$$\Delta y=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v.$$

Раздѣлимъ обѣ части равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+(v+\Delta v)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Переходимъ къ предѣлу при $\Delta x=0$ (§§ 99 и 100):

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x=0}(v+\Delta v)\frac{\Delta u}{\Delta x}=$$

$$=u\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x=0}(v+\Delta v)\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

или (§ 105)

$$\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\quad\ldots\ldots\ldots\ (73)$$

Теорему легко распространить на случай какого угодно конечнаго числа множителей.

Слѣдствіе. *Постоянный множитель при дифференцированіи можно выносить за знакъ дифференцированія.*

Пусть $y = Au$, гдѣ A — постоянное, а u есть функція x. По доказанной теоремѣ имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(Au)}{dx} = A\frac{du}{dx} + u\frac{dA}{dx}.$$

но (§ 107) $\frac{dA}{dx} = 0$. Слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = A\frac{du}{dx}.$$

§ 110. **Теорема 4.** *Производная дроби равна дроби, числитель которой есть разность произведеній знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а знаменатель равенъ квадрату знаменателя.*

Пусть $y = \frac{u}{v}$, гдѣ u, v суть функціи x. Давая x приращеніе Δx и обозначая соотвѣтственныя приращенія функцій y, u, v черезъ Δy, Δu, Δv, находимъ

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v};$$

вычитая начальное значеніе функціи, получимъ:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Раздѣлимъ обѣ части равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Переходимъ къ предѣлу при $\Delta x = 0$ (§§ 101, 99, 100):

$$\lim_{\Delta x = 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{\lim\limits_{\Delta x = 0}\left[v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]}{\lim\limits_{\Delta x = 0} v(v + \Delta v)} =$$

$$=\frac{v\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x=0}(v+\Delta v)},$$

или (§ 105)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}\quad\ldots\ldots\ldots(74)$$

§ 111. **Теорема 5.** *Производная функціи отъ функціи равна производной первой функціи по второй, какъ по независимому перемѣнному, умноженной на производную второй функціи по независимому перемѣнному.*

Пусть $y=f(u)$, гдѣ u есть функція x. Когда x получаетъ приращеніе Δx, функціи u и y получаютъ соотвѣтственныя приращенія Δu и Δy, при чемъ

$$y+\Delta y=f\ (u+\Delta u),$$
$$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u).$$

Раздѣливъ обѣ части послѣдняго равенства на Δx, получимъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta x}.$$

Умноживъ числитель и знаменатель второй части на Δu, представимъ это равенство въ такомъ видѣ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x};$$

переходя къ предѣлу при $\Delta x=0$ и замѣтивъ, что $\Delta u=0$ при $\Delta x=0$, находимъ (§ 100):

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u=0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

или (§ 105)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{du}{du}.$$

Замѣтивъ, что $f(u)=y$, можно эту формулу написать такъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(75)$$

что и требовалось доказать.

Теорема остается справедливой и для болѣе сложныхъ функцій. Пусть, напримѣръ, $y = F(u)$, гдѣ $u = f(v)$, гдѣ $v = \varphi(w)$, гдѣ $w = \varphi(x)$. Для производной $\frac{dy}{dx}$ имѣемъ по доказанной сейчасъ теоремѣ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

но по той же теоремѣ:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \text{ и } \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx},$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}.$$

§ 112. **Производная степени.** Пусть требуется найти производную функціи $y = x^m$, гдѣ m есть какое-нибудь постоянное раціональное число. — Давая x приращеніе Δx и обозначая соотвѣтственное приращеніе функціи y черезъ Δy, получимъ:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$$
$$\Delta y = (x + \Delta x)^m - x^m.$$

Раздѣливъ на Δx обѣ части равенства, получимъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Было доказано (§ 104), что

$$\lim_{x = a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = m \,.\, a^{m-1}$$

при всякомъ раціональномъ значеніи m. Если въ дроби $\frac{x^m - a^m}{x - a}$ замѣнимъ x черезъ $x + \Delta x$ и a черезъ x, то получимъ вторую часть формулы (a); такъ какъ при $x = a$ разность $x - a$ обращается въ нуль, то $\lim \Delta x = 0$. Слѣдовательно,

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = m x^{m-1},$$

или

$$\frac{dx^m}{dx} = m x^{m-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Теоремы §§ 107—112 даютъ возможность дифференцировать всѣ алгебраическія функціи. Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

1. $\frac{dx}{dx}=1\,.\,x^{1-1}=x^0=1.$

2. $\frac{dx^2}{dx}=2x^{2-1}=2x.$

3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{dx^{-1}}{dx}=-1\,.\,x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$

4. $\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

5. $\frac{d(p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n)}{dx}=$

$$=np_0x^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+\ldots+p_{n-1}.$$

6. $\frac{d}{dx}\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}=\frac{(\alpha x+\beta)\frac{d(ax+b)}{dx}-(ax+b)\frac{d(\alpha x+\beta)}{dx}}{(\alpha x+\beta)^2}$ ...(по форм. 74)

$=\frac{(\alpha x+\beta)\,.\,a-(ax+b)\alpha}{(\alpha x+\beta)^2}$ ... (по форм. 72, 73, 76)

$$=\frac{a\beta-b\alpha}{(\alpha x+\beta)^2}.$$

7. $\frac{d(ax+b)^n}{dx}=\frac{d(ax+b)^n}{d(ax+b)}\cdot\frac{d(ax+b)}{dx}$ . . . . (по форм. 75)

$=n(ax+b)^{n-1}\,.\,a$ . . . . . (по форм. 76)

8. $\frac{d\sqrt{ax^2+bx+c}}{dx}=\frac{d\sqrt{ax^2+bx+c}}{d(ax^2+bx+c)}\cdot\frac{d(ax^2+bx+c)}{dx}$ ...(по форм. 75)

$=\frac{1}{2}\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ...(по форм. 72, 73, 76).

§ 113. **Производная** *sin x*. Пусть $y=\sin x$. Давая x приращеніе Δx и обозначая соотвѣтственное приращеніе y черезъ Δy, находимъ

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x).$$

Приращеніе Δy функціи y выразится такъ:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x.$$

Преобразуемъ вторую часть этого равенства въ произведеніе. Получимъ:

$$\Delta y = 2 cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) sin\,\frac{\Delta x}{2}.$$

Раздѣливъ обѣ части равенства на Δx, находимъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\,cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x},$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Переходимъ къ предѣлу при $\Delta x = 0$:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \left[cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x = 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x = 0} \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}};$$

но $\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$; $\lim\limits_{\Delta x = 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = cos\,x$;

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \text{ (§ 104)}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = cos\,x, \text{ или } \frac{d\,sin\,x}{dx} = cos\,x. \;\ldots\ldots \quad (77)$$

§ 114. Производная $cos\,x$. Пусть $y = cos\,x$.

Сохраняя обозначенія и планъ вычисленій предыдущаго §, найдемъ:

$$y + \Delta y = cos(x + \Delta x);$$
$$\Delta y = cos(x + \Delta x) - cos\,x.$$

Преобразуя разность косинусовъ въ произведеніе, получаемъ

$$\Delta y = -2 sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) . \ sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\, sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Переходя къ предѣлу при $\Delta x = 0$, находимъ:

$$\lim_{\Delta x = 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x = 0}\left[sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right] =$$

$$= -\lim_{\Delta x = 0} sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right). \lim_{\Delta x = 0}\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -sin\ x$$

или, наконецъ,

$$\frac{d\ cos\ x}{dx} = -sin\ x \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (78)$$

§ 115. **Производная** $tan\ x$ и $cot\ x$. Пусть $y = tan\ x$. Такъ какъ

$$tan\ x = \frac{sin\ x}{cos\ x},$$

то

$$y = \frac{sin\ x}{cos\ x}.$$

Для опредѣленія производной отъ y нужно дифференцировать дробь $\frac{sin\ x}{cos\ x}$.

Прилагая правило дифференцированія дроби (§ 110), находимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\,\dfrac{d\sin x}{dx}-\sin x\,\dfrac{d\cos x}{dx}}{\cos^2 x}.$$

Отсюда по формуламъ (77) и (78) получимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

или

$$\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$\frac{d\cot x}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

§ 116. **Дифференцированіе тождества.** *Тождествомъ* называется равенство, справедливое при всѣхъ значеніяхъ буквъ, въ него входящихъ. Напр.,

$$x-x=0,\ (x+a)^2=x^2+2ax+a^2,\ (x+a)\ (x-a)=x^2-a^2$$

суть тождества.

Вмѣсто знака $=$ въ тождествахъ употребляется иногда знакъ $\equiv$, который читается такъ: „*тождественно равно*".

Докажемъ, что *дифференцированіе тождества приводитъ къ тождеству*.

Пусть дано тождество

$$F(x)\equiv 0.$$

Давая перемѣнному x приращеніе Δx, получимъ:

$$F(x+\Delta x)\equiv 0.$$

Поэтому

$$F(x+\Delta x)-F(x)\equiv 0;\quad \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\equiv 0;$$

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{dF(x)}{dx}\equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 117. **Обратныя круговыя (циклометрическія) функціи.** Обратными круговыми или циклометрическими функціями называются *обратныя тригонометрическихъ функцій*. Такихъ функцій шесть: 1) $arcsin x$ обозначаетъ *дугу, синусъ* которой равенъ x; 2) $arccos x$ обозначаетъ *дугу, косинусъ* которой равенъ x; 3) $arctan x$ обозначаетъ *дугу, тангенсъ* которой равенъ x; 4) $arccot x$ обозначаетъ *дугу, котангенсъ* которой равенъ x; 5) $arcsec x$ обозначаетъ *дугу, секансъ* которой равенъ x; 6) $arccosec x$ обозначаетъ *дугу, косекансъ* которой равенъ x.

Всѣ эти функціи *многозначны*, т.-е. имѣютъ безчисленное множество значеній для даннаго значенія перемѣннаго.

Для опредѣленности подъ $arcsin x$ и подъ $arctan x$ будемъ разумѣть тѣ дуги, которыя заключены между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, а подъ $arccos x$ и $arccot x$—дуги, заключенныя между $-\pi$ и $+\pi$.

Функціи $arcsin x$ и $arccos x$ имѣютъ *вещественныя* значенія только при $-1 \leq x \leq 1$. Функціи $arcsec x$ и $arccosec x$ имѣютъ *вещественныя* значенія только при $|x| \geq 1$. Функціи $arctan x$ и $arccot x$ имѣютъ *вещественныя* значенія для всѣхъ вещественныхъ значеній перемѣннаго x *).

§ 118. **Производная** $arcsin x$. Пусть дана функція

$$y = arcsin x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Требуется найти ея производную.

Рѣшая уравненіе (α) относительно x, получимъ:

$$x = sin y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Это равенство есть *тождество*, если подъ y разумѣть функцію перемѣннаго x, опредѣляемую уравненіемъ (α). Дифференцируя его по x (§ 116), находимъ (форм. 75, 77):

$$1 = \frac{d sin y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = cos y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Опредѣлимъ изъ этого уравненія $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos y}.$$

---

*) Подробности о круговыхъ функціяхъ см. въ курсахъ тригонометріи.

Отсюда по уравненіямъ (α) и (β) получаемъ искомую производную:

$$\frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (81)$$

§ 119. **Производная** *arccosx.* Требуется найти производную функціи

$$y=\arccos x \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Изъ этого уравненія опредѣляемъ x:

$$x=\cos y \quad \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Это равенство есть тождество, если подъ y разумѣть функцію перемѣннаго x, опредѣляемую уравненіемъ (α). Дифференцируя его по x (§ 116), находимъ (форм. 75, 78):

$$1=\frac{d\cos y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=-\sin y\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}.$$

или

$$\frac{d\arccos x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (82)$$

Примѣчаніе. Сравнивая производныя *arcsinx* и *arccosx*, мы замѣчаемъ, что онѣ отличаются только знаками. Складывая ихъ, получимъ:

$$\frac{d\arcsin x}{dx}+\frac{d\arccos x}{dx}=0,$$

или (§ 108)

$$\frac{d}{dx}\left[\arcsin x+\arccos x\right]=0.$$

Этотъ результатъ объясняется тѣмъ, что, какъ извѣстно изъ тригонометріи, двѣ дуги, для одной изъ которыхъ x служитъ синусомъ, а другой — косинусомъ, въ суммѣ составляютъ а

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \ (§\ 107).$$

§ 120. **Производная** *arctanx*. Требуется найти производную функціи

$$y = arctanx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Изъ этого уравненія опредѣляемъ x:

$$x = tany \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Разсматривая x, какъ функцію y, опредѣляемую уравненіемъ (α), дифференцируемъ это тождество по x (форм. 75, 79):

$$1 = \frac{dtany}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos^2y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = cos^2y.$$

Но $cos^2y = 1/séc^2y = 1/(1 + tan^2y) = 1/(1 + x^2)$; слѣд.,

$$\frac{darctanx}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

§ 121. **Производная** *arccotx*. Требуется найти производную функціи

$$y = arccotx.$$

Повторяя разсужденіе предыдущаго §, находимъ:

$$x = coty;$$

$$1 = \frac{dcoty}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sin^2y} \cdot \frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dy}{dx} = -sin^2y = -\frac{1}{1 + x^2};$$

$$\frac{darccotx}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Относительно производныхъ *arctanx* и *arccotx* см. примѣчаніе § 119.

§ 122. **Показательная функція.** *Показательной функціей* называется функція a^x, гдѣ a есть постоянное число, а x—перемѣнное.

Смыслъ выраженія a^x для *раціональныхъ* значеній x указывается въ элементарной алгебрѣ, а именно: если x есть *цѣлое положительное* число, то a^x есть произведеніе x множителей, рав-

ныхъ a; если x есть *положительная дробь* m/n, гдѣ m и n суть цѣлыя числа, то $a^x = \sqrt[n]{a^m}$; если $x = 0$, то $a^x = 1$; если x есть *отрицательное* число, то $a^x = 1/a^{-x}$.

Но при непрерывномъ измѣненіи перемѣнное x принимаетъ и *ирраціональныя* значенія. Поэтому нужно указать смыслъ выраженія a^x для ирраціональныхъ значеній x.

Ирраціональное число опредѣляется, какъ общій предѣлъ двухъ послѣдовательностей раціональныхъ чиселъ, обладающихъ слѣдующими свойствами: 1) каждое число первой послѣдовательности меньше каждаго числа второй послѣдовательности; 2) числа первой послѣдовательности возрастаютъ или, по крайней мѣрѣ, не убываютъ, а числа второй послѣдовательности убываютъ или, по крайней мѣрѣ, не возрастаютъ; 3) въ первой послѣдовательности нѣтъ числа *наибольшаго*, а во второй нѣтъ числа *наименьшаго*; 4) можно найти такія два числа, изъ которыхъ одно принадлежитъ къ первой послѣдовательности, а другое — ко второй, что разность между ними будетъ по абсолютному значенію меньше произвольнаго напередъ заданнаго числа.

Числа первой послѣдовательности служатъ для ирраціональнаго числа приближенными значеніями съ недостаткомъ, а числа второй послѣдовательности — приближенными значеніями съ избыткомъ.

Напр., $\sqrt{2}$ есть предѣлъ послѣдовательностей:

$$1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1,4142;\ \ldots\ldots$$
$$2;\ 1,5;\ 1,42;\ 1,415;\ 1,4143;\ \ldots\ldots$$

Число π есть предѣлъ послѣдовательностей:

$$3;\ 3,1;\ 3,14;\ 3,141;\ 3,1415;\ \ldots\ldots$$
$$4;\ 3,2;\ 3,15;\ 3,142;\ 3,1416;\ \ldots\ldots$$

Число e (§ 104) есть предѣлъ послѣдовательностей:

$$2;\ 2,7;\ 2,71;\ 2,718;\ 2,7182;\ \ldots\ldots$$
$$3;\ 2,8;\ 2,72;\ 2,719;\ 2,7183:\ \ldots\ldots$$

Пусть ирраціональное число x служитъ предѣломъ послѣдовательности возрастающихъ раціональныхъ положительныхъ чиселъ

$$x'_1,\ x'_2, \ldots,\ x'_n, \ldots$$

и предѣломъ послѣдовательности убывающихъ раціональныхъ положительныхъ чиселъ

$$x''_1,\ x''_2, \ldots,\ x''_n, \ldots$$

По указаннымъ выше свойствамъ чиселъ этихъ послѣдовательностей каждое число x' первой послѣдовательности меньше каждаго числа x'' второй послѣдовательности и можно найти такія два числа x'_n и x''_n, что разность $x''_n - x'_n$ будетъ меньше произвольнаго положительнаго числа.

Составимъ двѣ новыя послѣдовательности чиселъ:

$$a^{x'_1},\ a^{x'_2}, \ldots,\ a^{x'_n}, \ldots;$$
$$a^{x''_1},\ a^{x''_2}, \ldots,\ a^{x''_n}, \ldots$$

Можно доказать, что обѣ эти послѣдовательности стремятся къ одному и тому же предѣлу, при чемъ числа одной послѣдовательности приближаются къ нему, возрастая, а числа другой приближаются къ нему, убывая.

Этотъ общій предѣлъ двухъ указанныхъ послѣдовательностей принимается за значеніе показательной функціи a^x при x ирраціональномъ *).

Такъ, напр., подъ символомъ $10^{\sqrt{2}}$ разумѣется общій предѣлъ, къ которому стремятся послѣдовательности:

$$10^{1};\ 10^{1,4};\ 10^{1,41};\ 10^{1,414};\ 10^{1,4142};\ \ldots\ldots\ldots$$
$$10^{2};\ 10^{1,5};\ 10^{1,42};\ 10^{1,415};\ 10^{1,4143};\ \ldots\ldots\ldots$$

Значенія a^x для отрицательныхъ значеній показателя опредѣляются условіемъ $a^{-x} = 1/a^x$ $(x > 0)$.

§ 123. **Свойства функціи** a^x. Перечислимъ свойства показательной функціи a^x при $a > 1$.

1 свойство. $a^x > 0$.

2 свойство. $a^x > 1$ *при* $x > 0$ *и* $a^x < 1$ *при* $x < 0$.

3 свойство. *Функція a^x возрастаетъ вмѣстѣ съ x.*

4 свойство. $\lim a^x = 1$ при $x = 0$.

5 свойство. *Функція a^x непрерывна при всѣхъ значеніяхъ x.*

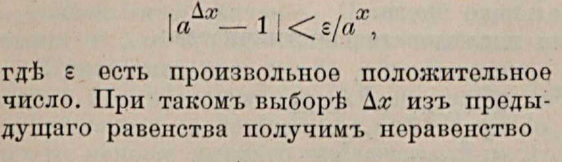
Если x есть нѣкоторое опредѣленное значеніе перемѣннаго x и Δx его приращеніе, то соотвѣтственное приращеніе функціи a^x выразится разностью $a^{x+\Delta x} - a^x$. Такъ какъ

$$a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left[a^{\Delta x} - 1\right]$$

---

*) Подробности о показательной функціи можно найти въ книгѣ: *С. Виноградовъ. Повторительный курсъ алгебры.* Гл. XVI.

и по 4-му свойству $\lim\limits_{\Delta x = 0} a^{\Delta x} = 1$, то можно взять Δx настолько малымъ по абсолютному значенію, что



Черт. 47.

$$|a^{\Delta x} - 1| < \varepsilon / a^x,$$

гдѣ ε есть произвольное положительное число. При такомъ выборѣ Δx изъ предыдущаго равенства получимъ неравенство

$$|a^{x+\Delta x} - a^x| < \varepsilon,$$

которое показываетъ непрерывность разсматриваемой функціи при произвольномъ значеніи x (§ 16).

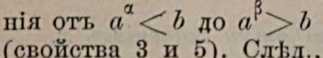
6 свойство. $\lim\limits_{x = \infty} a^x = \infty$.

7 свойство. $\lim\limits_{x = -\infty} a^x = 0$.

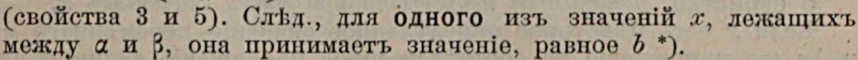
8 свойство. *Уравненіе* $a^x = b$ $(b > 0)$ имѣетъ **одинъ только** *вещественный корень*.

По свойству 7 можно указать такое число α, что $a^\alpha < b$.

По свойствамъ 3 и 6 можно найти такое число $\beta > \alpha$, что $a^\beta > b$. При непрерывномъ измѣненіи x отъ $x = \alpha$ до $x = \beta$ функ-



ція a^x возрастаетъ и принимаетъ *всѣ* значенія отъ $a^\alpha < b$ до $a^\beta > b$



(свойства 3 и 5). Слѣд., для **одного** изъ значеній x, лежащихъ между α и β, она принимаетъ значеніе, равное b *).

---

*) Это заключеніе основано на слѣдующемъ свойствѣ непрерывной функціи: если функція $f(x)$ непрерывна въ интервалѣ (a, b), а значенія ея $f(a)$ и $f(b)$ для концовъ интервала имѣютъ противоположные знаки, то между a и b имѣется, по крайней мѣрѣ, одно число c, обладающее тѣмъ свойствомъ, что $f(c) = 0$.

Это предложеніе совершенно ясно съ точки зрѣнія геометрической: графикъ функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b) есть непрерывная кривая, идущая отъ точки, опредѣляемой координатами $x = a$, $y = f(a)$, до точки, опре-

Все сказанное можно резюмировать слѣдующимъ образомъ: *при непрерывномъ измѣненіи перемѣннаго* x *отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$ *функція* a^x $(a>1)$ *непрерывно возрастаетъ отъ* 0 *до* ∞.

Обозначивъ функцію a^x черезъ y и принявъ x и y за прямоугольныя координаты точки на плоскости, можно построить *графикъ* показательной функціи, т.-е. кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$y=a^x.$$

На черт. 47 изображены двѣ кривыя, изъ которыхъ сплошная линія представляетъ кривую $x=e^x$, а пунктирная—кривую $y=10^x$.

§ 124. **Логариѳмъ.** По доказанному въ предыдущемъ § (свойство 8) уравненіе

$$a^y=x$$

при $a>1$ и $x>0$ имѣетъ одинъ вещественный корень. Онъ называется *логариѳмомъ числа* x *при основаніи* a *и обозначается знакомъ* $log_a x$, такъ что

$$y=log_a x,\quad a^{log_a x}=x.$$

Опредѣленіе логариѳма показываетъ, что *логариѳмъ есть функція, обратная показательной.*

Изъ свойствъ показательной функціи слѣдуетъ, *что* $log_a x$ *при* $a>1$ *и* $x>0$ *есть возрастающая функція, непрерывная при всѣхъ значеніяхъ* x *за исключеніемъ* $x=0$.

Въ теоретическихъ изслѣдованіяхъ употребляются обыкновенно логариѳмы при основаніи e (§ 104); они называются *натуральными* или *неперовыми* и въ дальнѣйшемъ обозначаются символомъ log безъ указанія основанія; въ практическихъ вопросахъ употребляются обыкновенно логариѳмы при основаніи 10, которые называются *десятичными.*

Графикъ логариѳмической функціи (черт. 48) представляетъ кривую, симметричную графику показательной функціи относи-

---

дѣляемой координатами $x=b$, $y=f(b)$. Пусть $f(a)<0$ и $f(b)>0$. Въ такомъ случаѣ первая изъ указанныхъ точекъ лежитъ въ области отрицательныхъ ординатъ, а вторая—въ области положительныхъ ординатъ. Кривая, соединяющая эти точки, должна перейти изъ первой области во вторую, т.-е. пересѣкать ось x, раздѣляющую эти области. Но для точекъ оси x ордината равна нулю; слѣд., между a и b имѣется такое число c, что $f(c)=0$. Свойство 8 является результатомъ приложенія этой теоремы къ функціи a^x-b.

Аналитическое доказательство указанной теоремы можно найти въ книгѣ: *А. Власовъ. Курсъ высшей математики.* Т. I, стр. 291 и слѣд.

тельно равнодѣлящей координатнаго угла, и можетъ быть полученъ вращеніемъ плоскости графика функціи a^x на 180^0 около равнодѣлящей координатнаго угла; при этомъ вращеніи оси координатъ мѣняются ролями.

§ 125. Производная показательной функціи. Пусть

$$y = a^x.$$

Давая перемѣнному x приращеніе Δx и обозначая соотвѣтственное приращеніе функціи y черезъ Δy, находимъ:

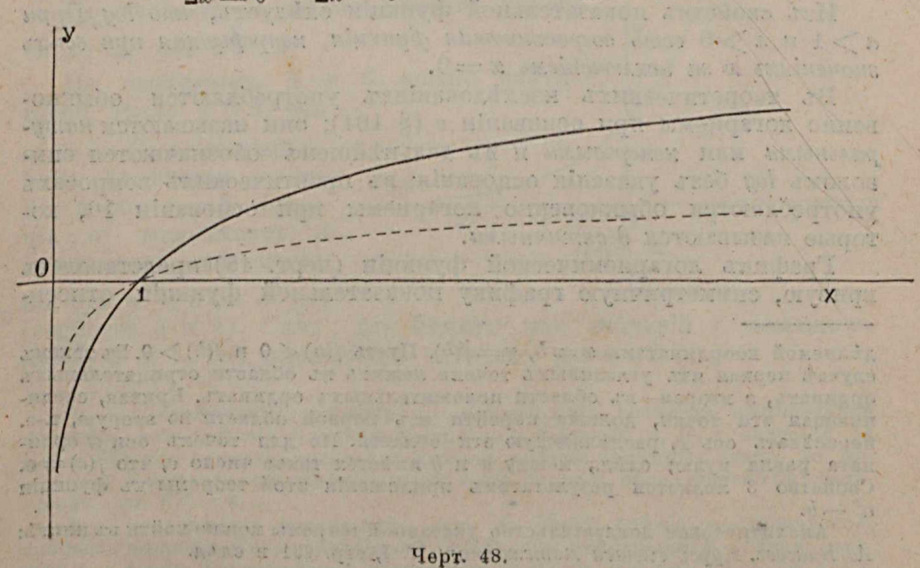
$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\left[a^{\Delta x} - 1\right].$$

Отсюда черезъ дѣленіе на Δx получимъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Для опредѣленія производной переходимъ къ предѣлу при $\Delta x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x = 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$



Черт. 48.

Такъ какъ $\lim\limits_{\Delta x = 0} a^{\Delta x} = 1$ (§ 123), то можно положить

$$a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{n},$$

при чемъ при стремленіи Δx къ нулю число n возрастаетъ до ∞. Взявъ логариѳмъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, находимъ:

$$\Delta x = log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Поэтому

$$\frac{dy}{dx} = a^x \lim_{n=\infty} \frac{1}{n log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = a^x . \lim_{n=\infty} \frac{1}{log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Отсюда (§§ 103, 124, 104) получаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = a^x . \frac{1}{log_a\left[\lim\limits_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]} = \frac{a^x}{log_a e},$$

или

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{a^x}{log_a e}.$$

Эта формула содержитъ $log_a e$, т.-е. логариѳмъ *постояннаго* числа e при основаніи a, которое можетъ быть *различно* въ различныхъ вопросахъ. Примѣненіе ея потребовало бы вычисленія логариѳма e при различныхъ основаніяхъ. Это неудобство можно устранить преобразованіемъ полученной формулы такъ, чтобы въ нее входилъ логариѳмъ при основаніи e.

Замѣтивъ, что, по опредѣленію логариѳма, $e = a^{log_a e}$, возьмемъ логариѳмы обѣихъ частей этого равенства при основаніи e:

$$1 = log_a e \,.\, log\, a.$$

Отсюда получимъ:

$$\frac{1}{log_a e} = log\, a.$$

При помощи этого соотношенія для производной a^x находимъ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{da^x}{dx} = a^x log\, a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (85)$$

Полагая въ этой формулѣ $a=e$, находимъ:

$$\frac{de^x}{dx}=e^x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (86)$$

§ 126. **Производная логариѳма.** Для нахожденія производной $log_a x$ воспользуемся тѣмъ, что логариѳмъ и показательная функція суть функціи обратныя другъ другу. Если

$$y=log_a x,$$

то

$$x=a^y.$$

Дифференцируя это равенство по x, находимъ (форм. 76, 85, 75):

$$1=a^y \,.\, log\, a \,.\, \frac{dy}{dx};$$

отсюда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{loga} \cdot \frac{1}{a^y}=\frac{1}{loga} \cdot \frac{1}{x}.$$

Итакъ,

$$\frac{d\, log_a x}{dx}=\frac{1}{x log\, a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (87)$$

Въ частномъ случаѣ, когда $a=e$, формула упрощается:

$$\frac{dlogx}{dx}=\frac{1}{x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (88)$$

§ 127. **Логариѳмическое дифференцированіе.** Между производными данной функціи и ея логариѳма существуетъ весьма простая зависимость.

Пусть $y=f(x)$. Вычисляя производную $log\, y$, находимъ (форм. 75, 88):

$$\frac{dlogy}{dx}=\frac{dlogy}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}=\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx};$$

отсюда имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx}=y\,\frac{dlogy}{dx},$$

т.-е. *производная функціи равна произведенію функціи на производную ея неперова логариѳма.*

Этой связью между производными функціи и ея логариѳма иногда пользуются для вычисленія производной данной функціи: сначала находятъ производную логариѳма данной функціи, а потомъ, умноженіемъ на самую функцію, опредѣляютъ ея производную. Такой пріемъ вычисленія производной называется *логариѳмическимъ дифференцированіемъ*.

Примѣръ 1. Требуется найти производную функціи

$$y=\frac{u_1u_2\ldots\ldots u_n}{v_1v_2\ldots\ldots v_m},$$

гдѣ u и v со значками обозначаютъ функціи x.

Возьмемъ логариѳмъ функціи y:

$$\begin{aligned}log y &= log u_1 + log u_2 + \ldots + log u_n -\\ &- log v_1 - log v_2 - \ldots - log v_m.\end{aligned}$$

Дифференцируя это равенство, находимъ:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}&=\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}+\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}+\ldots+\frac{1}{u_n}\frac{du_n}{dx}-\\ &-\frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{dx}-\frac{1}{v_2}\frac{dv_2}{dx}-\ldots-\frac{1}{v_m}\frac{dv_m}{dx}.\end{aligned}$$

Отсюда легко опредѣлить производную функціи y.

Примѣръ 2. Требуется найти производную функціи

$$y=u^v,$$

гдѣ u и v суть функціи x.

Данная функція представляетъ т. н. *сложную* функцію; общія правила дифференцированія такихъ функцій будутъ указаны ниже. Но производную ея легко найти при помощи логариѳмическаго дифференцированія.

Взявъ логариѳмъ y, находимъ:

$$log y = v log u.$$

Дифференцированіе этого равенства даетъ (фор. 75, 88):

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}log u+\frac{v}{u}\frac{du}{dx};$$

отсюда находимъ:

$$\frac{du^v}{dx}=u^{v-1}\left(u\frac{dv}{dx}log u+v\frac{du}{dx}\right).$$

Упражненія.

1. $\frac{d}{dx}(x^3-3x+1)=3(x^2-1)$.

2. $\frac{d}{dx}x(1-x)^2=(1-x)(1-3x)$.

3. $\frac{d}{dx}(1+x)^m(1-x)^n=(1+x)^{m-1}(1-x)^{n-1}\left\{(m-n)-(m+n)x\right\}$

4. $\frac{d}{dx}\frac{x}{1-x^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$.

5. $\frac{d}{dx}\frac{x^m}{(1-x)^n}=\frac{x^{m-1}\left\{m-(m-n)x\right\}}{(1-x)^{n+1}}$.

6. $\frac{d}{dx}\sqrt{1-x}=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$.

7. $\frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

8. $\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

9. $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{(a+bx+cx^2)^2}=\frac{2(b+2cx)}{3\sqrt[3]{a+bx+cx^2}}$.

10. $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x^3}{(a+\alpha x)(b+\beta x)(c+\gamma x)}}=$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{a}{a+\alpha x}+\frac{b}{b+\beta x}+\frac{c}{c+\gamma x}\right\}\sqrt{\frac{x}{(a+\alpha x)(b+\beta x)(c+\gamma x)}}.$$

11. $\frac{d}{dx}sin^m x=m\, sin^{m-1}x cos x$.

12. $\frac{d}{dx}sin mx=m cos mx$.

13. $\frac{d}{dx}cos^2 2x=-2sin 4x$.

14. $\frac{d}{dx}tan^2 x=2tan x\,.\,séc^2 x$.

15. $\frac{d}{dx}séc^2 x=2tan x\,.\,séc^2 x$.

Объяснить тождество результатовъ въ упражненіяхъ 14 и 15.

16. $\frac{d}{dx}(2x+sin2x)=4cos^2x.$

17. $\frac{d}{dx}cos^m(a+bx)=-mbcos^{m-1}(a+bx)sin(a+bx).$

18. $\frac{d}{dx}(3cotx+cot^3x)=-\frac{3}{sin^4x}.$

19. $\frac{d}{dx}sinax \,.\, sinbx=acosax \,.\, sinbx+bsinax \,.\, cosbx.$

20. $\frac{d}{dx}\sqrt{\alpha sin^2x+\beta cos^2x}=\frac{(\alpha-\beta)sin2x}{2\sqrt{\alpha sin^2x+\beta cos^2x}}.$

21. $\frac{d}{dx}\ arcsin\ \frac{1}{x}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

22. $\frac{d}{dx}\ arccos\ \frac{1}{x}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

23. $\frac{d}{dx}[arcsinx+arcsin\sqrt{1-x^2}]=0.$ *Объяснить результатъ.*

24. $\frac{d}{dx}\ arcsin\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{1+x^2}.$

25. $\frac{d}{dx}\ arctan\ \frac{2x}{1-x^2}=\frac{2}{1+x^2}.$

26. $\frac{d}{dx}\ arctan\ \{\sqrt{x^2+1}-x\}=-\frac{1}{2(x^2+1)}.$

27. $\frac{d}{dx}\ arccos\ \frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}.$

28. $\frac{d}{dx}\left\{2arctan\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}tan\frac{x}{2}\right]\right\}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+bcosx}.$

29. $\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\sqrt{a-1}}arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{1+ax^2}}\right\}=\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\frac{1}{(1+ax^2)\sqrt{1-x^2}}.$

30. $\frac{d}{dx}\ arcsin\ \frac{x+1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

31. $\frac{d}{dx}e^{ax}=ae^{ax}.$

32. $\frac{d}{dx}\ e^{x^2}=2xe^{x^2}.$

33. $\frac{d}{dx} e^{sinx} = cosx \cdot e^{sinx}$.

34. $\frac{d}{dx} log\left\{x + \sqrt{x^2+1}\right\} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

35. $\frac{d}{dx} logsinx = cotx$.

36. $\frac{d}{dx} logtanx = 2cos\acute{e}c2x$.

37. $\frac{d}{dx} log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$.

38. $\frac{d}{dx} log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{x^2+1}}$.

39. $\frac{d}{dx} e^{ax}cosbx = e^{ax}(acosbx - bsinbx)$.

40. $\frac{d}{dx}\left\{log\left[x+\sqrt{x^2-a^2}\right] + arccos\frac{a}{x}\right\} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$.

41. $\frac{d}{dx}\ logtan\left[\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right] = \frac{1}{cosx}$.

42. $\frac{d}{dx}\frac{k+x}{\sqrt{1+x^2}}\ e^{karctanx} = \frac{1+k^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \cdot e^{karctanx}$.

43. $\frac{d}{dx} x^x = x^x(1+logx)$.

44. $\frac{d}{dx} x^{sinx} = x^{sinx}\left\{cosx \cdot logx + \frac{sinx}{x}\right\}$.

45. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{n}\right)^{nx} = n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\left[1 + log\frac{x}{n}\right]$.

46. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e}\right)^x = \left(\frac{x}{e}\right)^x logx$.

47. $\frac{d}{dx} e^{(e^x)} = e^x . e^{e^x}$.

48. $\frac{d}{dx} x^{x^x} = x^{x^x} . x^x\left\{(logx)^2 + logx + \frac{1}{x}\right\}$.

49. $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - log x}{x^2}$.

50. $\frac{d}{dx}(a + bx)^{\frac{1}{x}} = \frac{(a+bx)^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left\{ \frac{bx}{a+bx} - log(a+bx) \right\}$.

ГЛАВА XI.

Дифференціалъ. Возрастаніе и убываніе функцій. Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ. Приложеніе первой и второй производной къ изслѣдованію измѣненія функціи.

§ 128. **Безконечно малыя различныхъ порядковъ.** Въ § 96 было дано опредѣленіе безконечно малаго числа, какъ перемѣннаго, стремящагося къ предѣлу, равному нулю. Но стремленіе къ нулю можетъ быть весьма различно, и это обстоятельство даетъ поводъ къ сравненію безконечно малыхъ между собою. Средствомъ для этого служитъ вычисленіе предѣла ихъ отношеній другъ къ другу.

Пусть σ и τ два безконечно малыхъ числа. Если предположить, что отношеніе σ къ τ имѣетъ предѣлъ, то могутъ встрѣтиться три случая: 1) $lim\ \sigma/\tau =$ конечн. чис., 2) $lim\ \sigma/\tau = 0$ и 3) $lim\ \sigma/\tau = \infty$.

Въ первомъ случаѣ σ и τ называются безконечно малыми *одинаковаго порядка;* во второмъ σ называется безконечно малымъ *высшаго порядка*, чѣмъ τ, или *безконечно малымъ относительно* τ; въ третьемъ случаѣ σ называется безконечно малымъ *низшаго порядка*, чѣмъ τ, или *безконечно большимъ* относительно τ.

Напримѣръ, $sin x$ и x при стремленіи x къ нулю суть безконечно малыя *одинаковаго* порядка, потому что $\lim\limits_{x=0} sin x/x = 1$ (§ 104); x^2 при стремленіи x къ нулю есть безконечно малое *высшаго* порядка, чѣмъ x, потому что $\lim\limits_{x=0} x^2/x = \lim\limits_{x=0} x = 0$; $\sqrt{x}$ при стремленіи x къ нулю есть безконечно малое *низшаго* порядка, чѣмъ x, потому что

$$\lim_{x=0} \sqrt{x}/x = \lim_{x=0} 1/\sqrt{x} = \infty.$$

Одно изъ безконечно малыхъ, разсматриваемыхъ совмѣстно, принимаютъ за *главное* и называютъ его безконечно малымъ *перваго* порядка, а всѣ остальныя сравниваютъ съ главнымъ.

Пусть изъ двухъ безконечно малыхъ σ и τ послѣднее принято за главное.

Если можно найти такое положительное число m, что

$$\lim \frac{\sigma}{\tau^m} = A, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\alpha)$$

гдѣ A есть опредѣленное *конечное* число, то число σ называютъ безконечно малымъ *m-аго порядка.*

Наприм., при стремленіи x къ нулю $\sin x$ есть безконечно малое *перваго* порядка относительно x, потому что $\lim\limits_{x=0} \sin x/x = 1$; x^2 есть безконечно малое *втораго порядка* относительно x, потому что $\lim\limits_{x=0} x^2/x^2 = 1$; $\sqrt{x}$ есть безконечно малое порядка 1/2, потому что $\lim\limits_{x=0} \sqrt{x}/x^{\frac{1}{2}} = 1$; $1 - \cos x$ есть безконечно малое *втораго* порядка относительно x, потому что

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x=0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x=0} \frac{1}{1+\cos x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ (см. § 104).}$$

Если σ есть безконечно малое *m-аго* порядка относительно τ, то по равенству (α)

$$\sigma = A\tau^m + \varepsilon\tau^m, \text{ гдѣ } \lim \varepsilon = 0.$$

Произведеніе $A\tau^m$ называется *главной* частью σ, а $\varepsilon\tau^m$—*дополнительной*; дополнительная часть безконечно мала сравнительно съ главной.

§ 129. **Дифференціалъ.** Пусть $y = f(x)$ есть функція перемѣннаго x. По опредѣленію производной (§ 105) имѣемъ:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

гдѣ Δx и Δy суть соотвѣтственныя приращенія перемѣннаго и функціи.

Изъ написаннаго равенства слѣдуетъ, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon \text{ или } \Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x,$$

при чемъ $\lim\limits_{\Delta x=0} \varepsilon = 0$ (§ 96).

Если Δx есть безконечно малое, то и Δy есть безконечно малое. Такъ какъ, вообще, $f'(x)$ есть число конечное, то предыдущія формулы показываютъ, что приращенія перемѣннаго и функціи суть, вообще, безконечно малыя одинаковаго порядка, и что главная часть приращенія Δy равна $f'(x)\Delta x$, а дополнительная равна $\varepsilon\Delta x$.

Главная часть приращенія Δy называется *дифференціаломъ* функціи y и обозначается знакомъ dy. Такимъ образомъ:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Если въ этой формулѣ положить $y = x$, то, принимая во вниманіе, что въ этомъ случаѣ $f'(x) = 1$, получимъ:

$$dx = \Delta x;$$

dx называется дифференціаломъ перемѣннаго. Дифференціалъ dx перемѣннаго x есть его приращеніе; онъ не зависитъ отъ x или, другими словами, есть *постоянное* число относительно x. Дифференціалъ функціи есть произведеніе ея производной на дифференціалъ перемѣннаго:

$$dy = f'(x)dx \text{ или } dy = y'dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (89)$$

Зная геометрическое значеніе производной (§ 106), легко обнаружить геометрическое значеніе дифференціала функціи. Пусть (черт. 46) на кривой $y = f(x)$ взяты точки $M(x,y)$ и $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Опустивъ изъ точекъ M и M' перпендикуляры на ось x, построивъ касательную къ кривой въ точкѣ M и проведя изъ этой точки прямую MQ, параллельную оси x, находимъ:

$$\Delta x = PP_1 = MQ; \; \Delta y = QM' = QS + SM'; \; QS = MQ \tan \widehat{QMS}.$$

Но
$$\tan QMS = f'(x); \text{ слѣд.,}$$
$$QS = f'(x)\Delta x,$$

т.-е. QS изображаетъ дифференціалъ функціи. Такимъ образомъ выяснилось геометрическое значеніе дифференціала функціи: *дифференціалъ функціи $y = f(x)$ представляетъ приращеніе ординаты* **касательной** *къ кривой $y = f(x)$ въ точкѣ (x,y) при переходѣ отъ абсциссы x къ абсциссѣ $x + \Delta x$.*

§ 130. Производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ. *Производная производной данной функціи называется производной второго порядка или второй производной этой функціи. Производная второй производной данной функціи называется производной третьяго порядка или третьей производной этой функціи и т. д.*

Въ соотвѣтствіе съ этими названіями производная функціи получаетъ названіе производной *перваго* порядка или *первой* производной.

Производныя 2-го, 3-го, 4-го, 5-го, ..., n-го порядка функціи y обозначаются соотвѣтственно символами: y'', y''', y^{IV}, y^{V}, ..., $y^{(n)}$.

Дифференціалъ дифференціала данной функціи называется дифференціаломъ второго порядка или вторымъ дифференціаломъ этой функціи. Дифференціалъ второго дифференціала данной функціи называется дифференціаломъ третьяго порядка или третьимъ дифференціаломъ этой функціи и т. д.

Дифференціалъ функціи получаетъ названіе дифференціала *перваго* порядка или *перваго* дифференціала.

Дифференціалъ n-го порядка обозначается символомъ d^n, присоединеннымъ къ обозначенію функціи. Напр., дифференціалъ второго порядка функціи y обозначается символомъ d^2y, дифференціалъ n-го порядка той же функціи обозначается символомъ d^ny.

По опредѣленію дифференціала имѣемъ (форм. 89):

$$d^2y = d(y'dx) = (y'dx)'dx;$$

по правилу дифференцированія произведенія (§ 109) находимъ:

$$(y'dx)' = y''dx + y'(dx)'.$$

Но dx есть постоянное число относительно x (§ 129); слѣд., $(dx)'=0$ (§ 107). Поэтому для второго дифференціала функціи y получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$d^2y = y''dx^2,$$

гдѣ $dx^2 = (dx)^2$. Раздѣливъ обѣ части этого равенства на dx^2, находимъ новый символъ для обозначенія второй производной:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Символъ $\frac{d^2y}{dx^2}$ аналогиченъ символу $\frac{dy}{dx}$, введенному для обозначенія первой производной (§ 105).

Тѣмъ же способомъ получаются слѣдующія выраженія для третьяго, четвертаго, ..., n-го дифференціала функціи y:

$$d^3y = y'''dx^3,\ d^4y = y^{(\text{IV})}\,dx^4, \ldots,\ d^ny = y^{(n)}dx^n.$$

Изъ этихъ равенствъ получаемъ для обозначенія n-ой производной символъ: $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Приведемъ примѣры вычисленія производныхъ высшихъ порядковъ.

Примѣръ 1. Если $y=x^m$, то $y'=mx^{m-1}$, $y''=m(m-1)\ x^{m-2},\ldots,$

$$y^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{n-n}.$$

Если m есть натуральное число, то этотъ рядъ производныхъ конеченъ, такъ какъ

$$y^{(m)}=m(m-1)\ldots.2\,.\,1,\ y^{(m+1)}=0.$$

2. Если $y=sin x$, то

$$y'=cos x=sin(x+\frac{\pi}{2}),\ y''=sin\ (x+2\,.\frac{\pi}{2}),\ldots.,$$

$$y^{(n)}=sin\ (x+n\,.\frac{\pi}{2}).$$

3. Если $y=a^x$, то

$$y'=a^x\,.\,log a,\ y''=a^x(log a)^2,\ldots,y^{(n)}=a^x(log a)^n.$$

Всѣ производныя функціи e^x равны e^x.

4. Если $y=log x$, то

$$y'=1/x,\ y''=-1/x^2,\ y'''=1\,.\,2/x^3,\ldots,\ y^{(n)}=(-1)^{n-1}1\,.\,2..(n-1)\ x^{-n}.$$

§ 131. **Возрастаніе и убываніе функцій.** Пусть дана функція $y=f(x)$.

Приращеніе Δy ея выражается формулой (§ 129):

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x,\ (\lim\ \varepsilon=0\ \text{при}\ \Delta x=0).$$

Изъ сказаннаго въ §§ 128 и 129 слѣдуетъ, что при достаточно маломъ $|\Delta x|$ второй членъ второй части написанной формулы не можетъ оказать вліянія на *знакъ* всей второй части, и что знакъ Δy совпадаетъ со знакомъ произведенія $f'(x)\Delta x$.

Поэтому, если при $\Delta x>0$ производная $f'(x)$ *положительна*, то и приращеніе Δy функціи *положительно*, т.-е. функція *y возрастаетъ* вмѣстѣ съ x; если же производная $f'(x)$ *отрицательна*, то и приращеніе Δy функціи *отрицательно*, т.-е. функція *y убываетъ* при возрастаніи x.

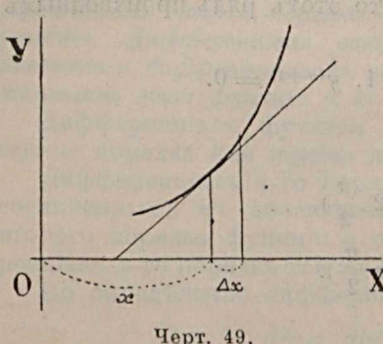
При $\Delta x<0$ *отрицательному* значенію производной $f'(x)$ соотвѣтствуетъ *возрастаніе* функціи, а *положительному* значенію производной—*убываніе* функціи.

Такимъ образомъ устанавливается слѣдующая связь между возрастаніемъ или убываніемъ функціи и знакомъ ея производ-

ной: *если для нѣкотораго значенія x производная $f'(x)$ функціи $f(x)$ положительна, то $f(x)$ возрастаетъ при возрастаніи x отъ этого значенія; если же для нѣкотораго значенія x производная $f'(x)$ отрицательна, то $f(x)$ убываетъ при возрастаніи x отъ этого значенія.*

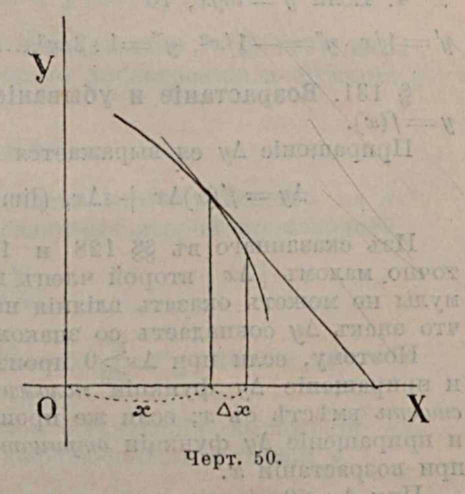
Сказанному можно дать геометрическое толкованіе.

Если принять x и y за прямоугольныя координаты точки на плоскости, то уравненіе $y=f(x)$ опредѣлитъ на плоскости нѣкоторую кривую (§ 18), а $f'(x)$ представитъ значеніе тангенса угла, который образуется касательной къ этой кривой въ точкѣ (x, y) съ положительнымъ направленіемъ оси x (§ 106). Если $f'(x)>0$, то этотъ уголъ или *острый*, или равенъ суммѣ π и остраго угла; въ этомъ случаѣ ордината кривой *возрастаетъ* при возрастаніи абсциссы (черт. 49). Если $f'(x)<0$, то уголъ касательной въ точкѣ (x, y) съ осью x либо *тупой*, либо равенъ суммѣ π и тупого угла; въ этомъ случаѣ ордината кривой *убываетъ* при возрастаніи абсциссы (черт. 50).



Черт. 49.

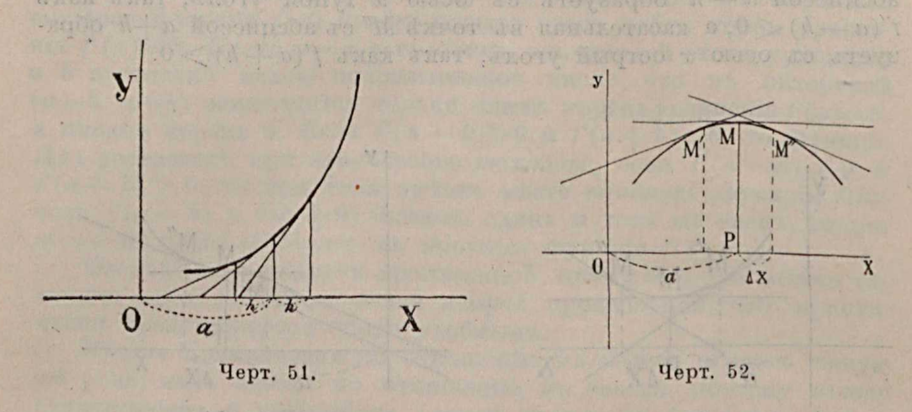
§ 132. **Maximum и minimum функціи.** Пусть дана функція $f(x)$, непрерывная въ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$, гдѣ $h>0$, и имѣющая производную $f'(x)$, которая также непрерывна въ этомъ интервалѣ.



Черт. 50.

При изслѣдованіи измѣненія функціи $f(x)$, когда x возрастаетъ отъ $a-h$ до $a+h$, могутъ представиться слѣдующіе случаи: 1) производная $f'(x)$ данной функціи имѣетъ либо *положительныя*, либо *отрицательныя* значенія для всѣхъ значеній x, заключенныхъ въ интервалѣ $(a-h, a+h)$; 2) производная $f'(x)$, измѣняясь непрерывно при измѣненіи x отъ $a-h$ до $a+h$, при $x=a$ обращается въ *нуль* и переходитъ при этомъ отъ *положительныхъ* значеній къ *отрицательнымъ* или, наоборотъ, отъ *отрицательныхъ* значеній къ *положительнымъ;* 3) производная

$f'(x)$, обращаясь при $x=a$ въ *нуль*, не мѣняетъ при этомъ своего знака, т.-е. имѣетъ значенія одинаковаго знака для значеній x, заключенныхъ въ каждомъ изъ интерваловъ: $(a-h, a)$ и $(a, a+h)$. Въ *первомъ* случаѣ функція $f(x)$ при измѣненіи x отъ $a-h$ до $a+h$ либо постоянно *возрастаетъ*, либо постоянно убываетъ (§ 131). Въ томъ и другомъ случаѣ измѣненіе функціи называется *монотоннымъ*. Черт. 51 представляетъ теченіе графика функціи въ случаѣ ея возрастанія въ интервалѣ $(a-h, a+h)$.



Черт. 51. Черт. 52.

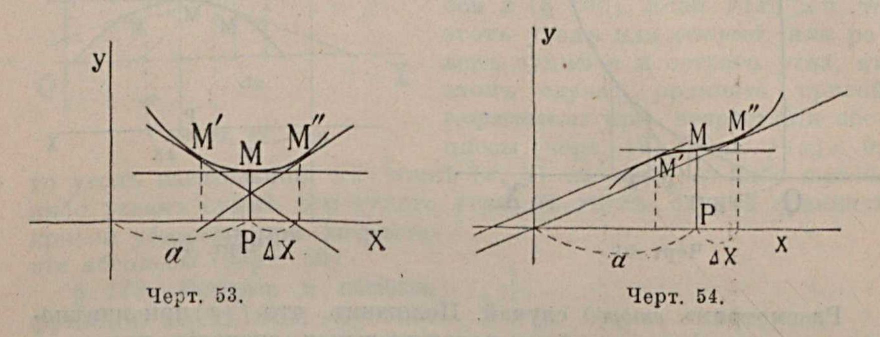
Разсмотримъ *второй* случай. Положимъ, что $f'(x)$ при измѣненіи x отъ $a-h$ до a имѣетъ положительныя значенія, при $x=a$ обращается въ нуль, а при измѣненіи x отъ a до $a+h$ принимаетъ отрицательныя значенія. При этихъ условіяхъ въ интервалѣ $(a-h, a)$ функція $f(x)$ возрастаетъ, а въ интервалѣ $(a, a+h)$ она убываетъ (§ 131). При $x=a$ происходитъ смѣна возрастанія на убываніе и функція достигаетъ своего *наибольшаго* значенія или своего *maximum* въ интервалѣ $(a-h, a+h)$.

Если $f'(x)$ имѣетъ отрицательныя значенія при измѣненіи x отъ $a-h$ до a, обращается въ нуль при $x=a$, а при измѣненіи x отъ a до $a+h$ получаетъ положительныя значенія, то функція $f(x)$ въ интервалѣ $(a-h, a)$ убываетъ, а въ интервалѣ $(a, a+h)$ возрастаетъ (§ 131). При $x=a$ происходитъ смѣна убыванія на возрастаніе и функція достигаетъ своего *наименьшаго* значенія или своего *minimum* въ интервалѣ $(a-h, a+h)$.

Чертежъ 52 представляетъ теченіе графика функціи $f(x)$ въ интервалѣ $(a-h, a+h)$ въ случаѣ *maximum* при $x=a$. Кривая $y=f(x)$ для $x=a$ имѣетъ ординату PM, большую сосѣднихъ слѣва и справа. Касательная къ кривой въ точкѣ M параллельна оси x, такъ какъ $f'(a)=0$; касательная въ точкѣ M' съ

абсциссой $a-h$ *) образуетъ съ осью x острый уголъ, такъ какъ $f'(a-h)>0$, а касательная въ точкѣ M'' съ абсциссой $a+h$ образуетъ съ осью x тупой уголъ, такъ какъ $f'(a+h)<0$ (§ 106).

Чертежъ 53 представляетъ теченіе графика функціи $f(x)$ въ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$ въ случаѣ *minimum* при $x=a$. Кривая $y=f(x)$ для $x=a$ имѣетъ ординату PM, меньшую сосѣднихъ слѣва и справа. Касательная къ кривой въ точкѣ M параллельна оси x, такъ какъ $f'(a)=0$; касательная къ кривой въ точкѣ M' съ абсциссой $a-h$ образуетъ съ осью x тупой уголъ, такъ какъ $f'(a-h)<0$, а касательная въ точкѣ M'' съ абсциссой $a+h$ образуетъ съ осью x острый уголъ, такъ какъ $f'(a+h)>0$.



Черт. 53. Черт. 54.

Разсмотримъ, наконецъ, *третій* случай. Такъ какъ производная $f'(x)$ имѣетъ одинаковый знакъ и для значеній x въ интервалѣ $(a-h,\ a)$, и для значеній x въ интервалѣ $(a,\ a+h)$, то функція $f(x)$ измѣняется монотонно во всемъ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$ и при $x=a$ не имѣетъ ни *maximum*, ни *minimum*, хотя производная ея $f'(x)$ обращается въ нуль при $x=a$.

Черт. 54 представляетъ теченіе графика функціи $f(x)$, возрастающей въ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$ и имѣющей производную $f'(x)$, которая обращается въ нуль при $x=a$. Кривая $y=f(x)$ имѣетъ при $x=a$ ординату PM, которая больше сосѣднихъ слѣва и меньше сосѣднихъ справа; касательная къ кривой въ точкѣ M параллельна оси x, такъ какъ $f'(a)=0$; касательныя къ кривой въ точкѣ M' съ абсциссой $a-h$ и въ точкѣ M'' съ абсциссой $a+h$ образуютъ съ осью x острые углы, такъ какъ $f(a\pm h)>0$. Точка M называется въ этомъ случаѣ точкой *перегиба* кривой.

Приведенныя разсужденія дополняютъ выводы, сдѣланные въ § 131 о связи между характеромъ измѣненія функціи и знакомъ

*) На чертежахъ 52, 53 и 54 вмѣсто h поставлено Δx.

ея производной, и позволяютъ формулировать предложеніе, которое является обратнымъ указанному въ § 131.

Если функція $f(x)$ при возрастаніи перемѣннаго отъ $x=a$ возрастаетъ, то $f'(a)\geqslant 0$; если функція $f(x)$ при возрастаніи перемѣннаго отъ $x=a$ убываетъ, то $f'(a)\leqslant 0$.

Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ существованія при $x=a$ *maximum* или *minimum* функціи $f(x)$ является обращеніе въ нуль ея производной $f'(x)$ при $x=a$, сопровождаемое перемѣной знака этой производной. Поэтому для нахожденія *maximum* или *minimum* функціи $f(x)$ нужно прежде всего найти корни уравненія $f'(x)=0$. Пусть $x=a$ есть одинъ изъ корней этого уравненія и h настолько малое положительное число, что въ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$ заключается только одинъ корень уравненія $f'(x)=0$, а именно корень a. Если $f'(a-h)>0$ и $f'(a+h)<0$, то функція $f(x)$ достигаетъ при $x=a$ своего *maximum*; если $f'(a-h)<0$ и $f'(a+h)>0$, то при $x=a$ имѣетъ мѣсто *minimum* функціи $f(x)$; если $f'(a-h)$ и $f'(a+h)$ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, то при $x=a$ нѣтъ ни *maximum*, ни *minimum* функціи $f(x)$.

Изслѣдованіе знаковъ производной при $x=a\pm h$ можно замѣнить изслѣдованіемъ знака *второй* производной, что практически представляется болѣе удобнымъ.

Вторая производная по отношенію къ *первой* играетъ такую же роль, какъ *первая* по отношенію къ *данной*; поэтому между возрастаніемъ и убываніемъ первой производной и знакомъ второй существуетъ зависимость, указанная въ §§ 131 и 132.

Въ случаѣ *maximum* функціи $f(x)$ при $x=a$ ея производная $f'(x)$ *положительна*, когда $a-h\leqslant x<a$, *равна нулю* при $x=a$ и *отрицательна*, когда $a<x\leqslant a+h$, т.-е. $f'(x)$ *убываетъ* въ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$. Слѣд. $f''(a)\leqslant 0$.

Въ случаѣ *minimum* функціи $f(x)$ при $x=a$ ея производная $f'(x)$ *отрицательна*, когда $a-h\leqslant x<a$, *равна нулю* при $x=a$ и *положительна*, когда $a<x\leqslant a+h$, т.-е. $f'(x)$ *возрастаетъ* въ интервалѣ $(a-h,\ a+h)$. Слѣд. $f''(a)\geqslant 0$.

Поэтому функція $f(x)$ имѣетъ при $x=a$ *maximum*, если $f'(a)=0$ и $f''(a)<0$; она имѣетъ при $x=a$ *minimum*, если $f'(a)=0$ и $f''(a)>0$. Въ случаѣ $f''(a)=0$ рѣшеніе вопроса о *maximum* или *minimum* функціи $f(x)$ можно получить изъ разсмотрѣнія знаковъ $f'(a-h)$ и $f'(a+h)$ *).

§ 133. **Примѣръ 1.** *Найти maximum и minimum функціи* $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

---

*) Случай $f''(a)=0$ будетъ разсмотрѣнъ при болѣе подробномъ изложеніи вопроса о *maximum* и *minimum* (§ 193).

Находимъ производную $f'(x)$:

$$f'(x) = 6(x^2 - x).$$

Приравнивая ее нулю, получаемъ уравненіе

$$x^2 - x = 0,$$

корни котораго суть $x = 0$ и $x = 1$.

Находимъ вторую производную $f''(x)$:

$$f''(x) = 6(2x - 1);$$

вычисляя ея значенія при $x = 0$ и $x = 1$, получимъ: $f''(0) = -6$, $f''(1) = 6$.

Отсюда заключаемъ, что при $x = 0$ данная функція имѣетъ *maximum*, а при $x = 1$ — *minimum*.

Примѣръ 2. *Изъ прямоугольниковъ съ даннымъ периметромъ* $2p$ *найти наибольшій.*

Если одна изъ сторонъ искомаго прямоугольника есть x, то другая равна $p - x$; площадь его выражается произведеніемъ $x(p - x)$.

Нужно опредѣлить x такъ, чтобы это произведеніе имѣло наибольшее значеніе. Полагая $f(x) = x(p - x)$, находимъ

$$f'(x) = p - 2x.$$

Производная обращается въ нуль при $x = p/2$. Такъ какъ $f''(x) = -2$, т.-е. отрицательна при всѣхъ значеніяхъ x, то при $x = p/2$ функція достигаетъ *maximum*. Искомый прямоугольникъ есть квадратъ.

Примѣръ 3. *Найти maximum и minimum функціи*:

$$f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 1.$$

Находимъ производную, приравниваемъ ее нулю и рѣшаемъ полученное уравненіе:

$$f'(x) = 60(x^4 - x^3 - x^2 + x) = 60x(x + 1)(x - 1)^2;$$
$$x(x + 1)(x - 1)^2 = 0;\ x = 0;\ x = -1;\ x = 1.$$

Находимъ вторую производную и ея значенія при $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$:

$$f''(x) = 60(4x^3 - 3x^2 - 2x + 1);$$
$$f''(0) = 60;\ f''(-1) = -240;\ f''(1) = 0.$$

Такъ какъ $f''(0) > 0$, то при $x = 0$ данная функція имѣетъ *наименьшее* значеніе; такъ какъ $f''(-1) < 0$, то при $x = -1$ она достигаетъ *наибольшаго* значенія. Для рѣшенія вопроса о томъ,

существуетъ ли *maximum* или *minimum* функціи при $x=1$, воспользоваться второй производной нельзя, такъ какъ при этомъ значеніи перемѣннаго она обращается въ нуль. Поэтому приходится обратиться непосредственно къ изслѣдованію знаковъ тѣхъ значеній первой производной, которыя она имѣетъ при значеніяхъ x, смежныхъ съ 1, т.-е. при значеніяхъ $x=1\pm h$, гдѣ $0<h<1$. Подставляя эти значенія x въ выраженіе $f'(x)$, находимъ:

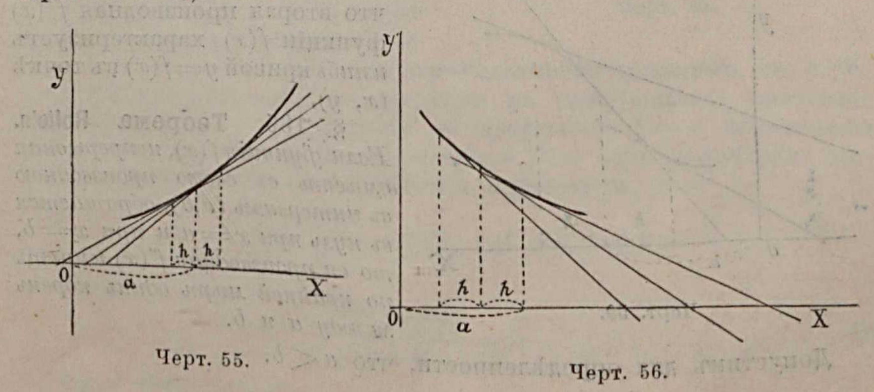
$$f'(1-h)=60(1-h)(2-h)h^2>0;\ f'(1+h)=60(1+h)(2+h)h^2>0.$$

Отсюда заключаемъ, что $f(x)$ при $x=1$ не имѣетъ ни *maximum* ни *minimum*, такъ какъ $f'(x)$, обращаясь при $x=1$ въ нуль, не мѣняетъ при этомъ своего знака.

§ 134. **Геометрическое значеніе второй производной. Вогнутость и выпуклость кривой. Точка перегиба.** Нахожденіе наибольшихъ и наименьшихъ значеній функціи составляетъ часть задачи объ изслѣдованіи измѣненія функціи при непрерывномъ измѣненіи перемѣннаго. Въ §§ 131 и 132 была указана роль, которую играютъ при этомъ изслѣдованіи первая и вторая производныя функціи. Интерпретируя результаты изслѣдованія геометрически, мы пользовались геометрическимъ значеніемъ уравненія между двумя перемѣнными (§ 18) и геометрическимъ значеніемъ первой производной (§ 106). Пополнимъ теперь эти геометрическія толкованія указаніемъ геометрическаго значенія второй производной.

Вторая производная $f''(x)$ функціи $f(x)$ представляетъ *скорость* измѣненія первой производной $f'(x)$, т.-е. тангенса угла α касательной къ кривой $y=f(x)$ въ точкѣ (x,y) съ осью x (§§ 105 и 106).

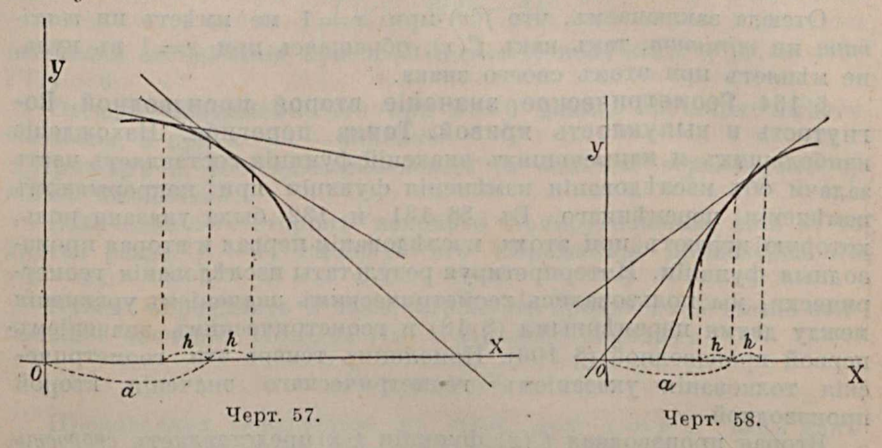
Если $f''(x)>0$ для интервала $(a-h,\ a+h)$, гдѣ $h>0$, то $tan\ \alpha$ возрастаетъ съ возрастаніемъ x, а такъ какъ уголъ и его тангенсъ возрастаютъ одновременно, то возрастаетъ и уголъ α (см. черт. 55 и 56).



Черт. 55. Черт. 56.

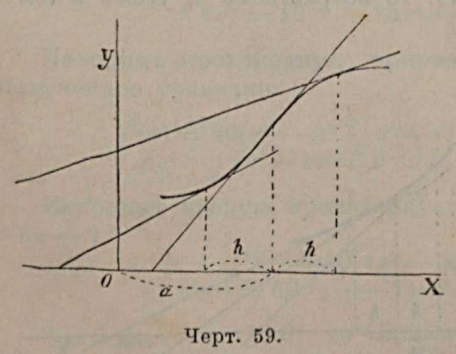
О кривой въ этомъ случаѣ говорятъ, что она въ точкѣ $[a, f(a)]$ *вогнута* или обращена *вогнутостью* въ сторону *положительнаго* направленія оси y (или, короче, *вверхъ*, если ось y вертикальна и направлена *вверхъ*).

Если $f''(x) < 0$ для интервала $(a-h, a+h)$, то $tan\ \alpha$ и уголъ α убываютъ съ возрастаніемъ x (см. черт. 57 и 58). О кривой въ этомъ случаѣ говорятъ, что она въ точкѣ $[a, f(a)]$ *выпукла* или обращена *выпуклостью* въ сторону *положительнаго* направленія оси y.



Черт. 57. Черт. 58.

Если $f''(x) \geqq 0$, когда $a-h \leqslant x < a$, $f''(a)=0$ и $f''(x) \leqq 0$, когда $a < x \leqslant a+h$, то въ точкѣ $[a, f(a)]$ происходитъ перемѣна вогнутости на выпуклость или выпуклости на вогнутость. Точка $[a, f(a)]$ называется *точкой перегиба* (черт. 59).



Черт. 59.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что вторая производная $f''(x)$ функціи $f(x)$ характеризуетъ *изгибъ* кривой $y=f(x)$ въ точкѣ (x, y).

§ 135. Теорема Rolle'я. *Если функція $f(x)$, непрерывная вмѣстѣ съ своею производною въ интервалѣ (a,b), обращается въ нуль при $x=a$ и при $x=b$, то ея производная $f'(x)$ имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень между a и b.*

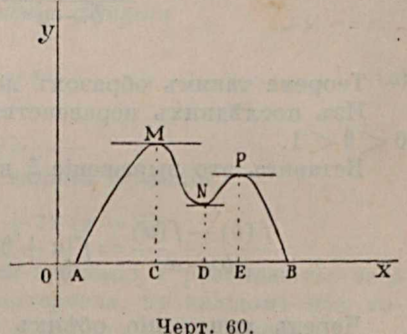
Допустимъ для опредѣленности, что $a < b$.

По условіямъ теоремы имѣемъ: $f(a)=0$ и $f(b)=0$.

При возрастаніи x отъ a до b функція $f(x)$ не можетъ измѣняться монотонно, т.-е. постоянно возрастать или постоянно убывать, потому что начальное и конечное значенія ея одинаковы. Слѣд., она должна либо оставаться равной нулю для всѣхъ значеній x въ интервалѣ (a, b), либо при нѣкоторомъ значеніи $x=\xi$, лежащемъ внутри этого интервала, измѣнять возрастаніе на убываніе или, наоборотъ, убываніе на возрастаніе. Въ первомъ случаѣ ея производная $f'(x)$ равна нулю для всѣхъ значеній x въ интервалѣ (a, b) (§ 107). Во второмъ случаѣ производная $f'(x)$ при $x=\xi$ измѣняетъ свой знакъ (§§ 131 и 132) и обращается въ *нуль*, такъ какъ, по условію теоремы, она непрерывна. Итакъ, между a и b существуетъ такое число ξ, при которомъ $f'(x)$ обращается въ нуль, что и требов. доказать.

Не трудно убѣдиться, что, при сохраненіи условій теоремы, $f'(x)$ можетъ въ интервалѣ (a,b) обратиться въ нуль не одинъ разъ, а нѣкоторое нечетное число разъ.

Чертежъ 60 представляетъ геометрическую иллюстрацію теоремы *Rolle*'я. На немъ изображена часть кривой $y=f(x)$. Для $x=OA=a$ и для $x=OB=b$ ординаты этой кривой суть нули; для $x=OC=\xi$, $x=OD=\xi'$ и $x=OE=\xi''$ касательныя къ кривой параллельны оси x, т.-е. $f'(x)=0$.



Черт. 60.

§ 136. Теорема Lagrange'а. Пусть $f(x)$ есть функція, непрерывная вмѣстѣ съ ея производною въ интервалѣ (a,b).

Разность $f(b)-f(a)$ есть *приращеніе* (конечное) функціи при измѣненіи x отъ a до b, а разность $b-a$ есть приращеніе независимаго перемѣннаго. Для опредѣленности положимъ, что $a<b$.

Теорема *Lagrange*'а заключается въ слѣдующемъ: *отношеніе приращенія $f(b)-f(a)$ функціи къ приращенію $b-a$ независимаго перемѣннаго равно значенію производной $f'(x)$ при нѣкоторомъ промежуточномъ между a и b значеніи перемѣннаго*, т.-е.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \text{ гдѣ } a<\xi<b.$$

Пусть

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

Изъ этого равенства находимъ:

$$f(b)-f(a)-(b-a)A=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

Возьмемъ вспомогательную функцію $\Phi(x)$, составленную слѣдующимъ образомъ:

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-(x-a)A \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ; \quad (\gamma)$$

Легко видѣть, что при $x=a$ и $x=b$ функція $\Phi(x)$ обращается въ нуль. Кромѣ того, изъ условій теоремы слѣдуетъ, что эта функція и ея производная непрерывны въ интервалѣ (a, b). Поэтому, прилагая къ $\Phi(x)$ теорему *Rolle*'я (§ 135), находимъ:

$$\Phi'(\xi)=f'(\xi)-A=0, \text{ гдѣ } a<\xi<b.$$

Опредѣливъ отсюда A и подставивъ въ равенство (α), получимъ:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \qquad a<\xi<b. \; . \; . \; . \; . \quad (\delta)$$

Теорема такимъ образомъ доказана.

Изъ послѣднихъ неравенствъ видно, что $\xi=a+\theta(b-a)$, гдѣ $0<\theta<1$.

Вставивъ это выраженіе ξ въ формулу (δ), находимъ:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'[a+\theta(b-a)], \qquad 0<\theta<1 \; . \; . \; . \; . \quad (\varepsilon).$$

Черезъ умноженіе обѣихъ частей этого равенства на $b-a$ получаемъ выраженіе *конечнаго приращенія* функціи при измѣненіи перемѣннаго отъ a до b:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'[a+\theta(b-a)], \qquad 0<\theta<1.$$

Отсюда, полагая $b-a=\Delta x$ и замѣняя a черезъ x, находимъ

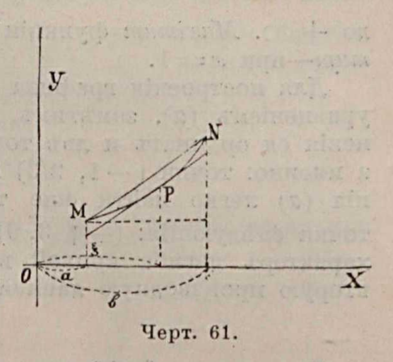
$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\theta\Delta x), \qquad 0<\theta<1.$$

Теоремѣ *Lagrange'a* можно дать простое геометрическое толкованіе. Если MN есть дуга кривой, опредѣляемой уравненіемъ $y=f(x)$, а точки M и N имѣютъ абсциссы, равныя соотвѣт-

ственно a и b (черт. 61), то отношеніе

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

есть угловой коэффиціентъ (§ 27) хорды MN, а $f'(\xi)$ есть угловой коэффиціентъ касательной къ этой кривой въ нѣкоторой точкѣ, лежащей между M и N. Равенство (δ) указываетъ на параллельность этой касательной и хорды MN (§ 30). Поэтому теорема утверждаетъ, *что, при соблюденіи нѣкоторыхъ условій, между точками M и N кривой существуетъ на ней такая точка, въ которой касательная параллельна хордѣ MN.*



Черт. 61.

§ 137. **Примѣры изслѣдованія измѣненія функціи.** Приведемъ примѣры пользованія первой и второй производной при изученіи измѣненія функціи и построеніи ея графика.

Примѣръ 1. *Изслѣдовать измѣненія функціи*

$$y=\frac{x^3}{3}-x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Найдемъ первую производную данной функціи:

$$y'=x^2-1=(x+1)\;(x-1)$$

$y'=0$ при $x=-1$ и $x=+1$. Эти значенія x разбиваютъ весь интервалъ $(-\infty, +\infty)$ на три интервала, въ каждомъ изъ которыхъ y' сохраняетъ свой знакъ, а именно на интервалы:

$$(-\infty,-1),\ (-1,+1),\ (1,\infty).$$

Въ первомъ изъ нихъ $y'>0$, во второмъ $y'<0$ и въ третьемъ $y'>0$.

Припоминая связь между измѣненіями функціи и знакомъ ея производной (§§ 131 и 132) и вычисляя значенія y для концовъ каждаго изъ указанныхъ трехъ интерваловъ, мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ: при возрастаніи x отъ $-\infty$ до -1 функція y возрастаетъ отъ $-\infty$ до $2/3$; при возрастаніи x отъ -1 до $+1$ функція y убываетъ отъ $2/3$ до $-2/3$; при дальнѣйшемъ возрастаніи x отъ 1 до ∞ функція y возрастаетъ

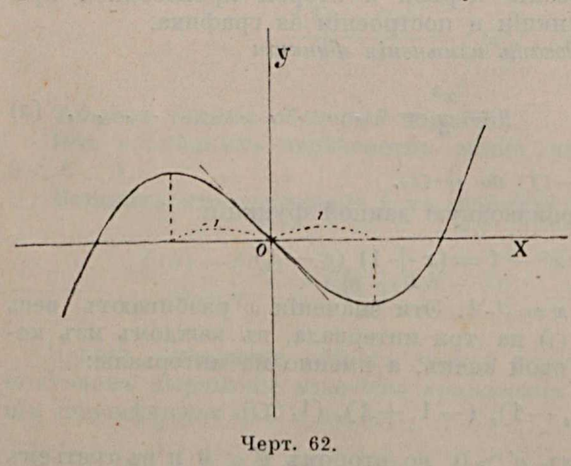
11*

до $+\infty$. *Maximum* функціи имѣетъ мѣсто при $x=-1$, а *minimum*—при $x=1$.

Для построенія графика функціи, т.-е. кривой, опредѣляемой уравненіемъ (α), замѣтимъ, что намъ уже извѣстенъ ходъ измѣненія ея ординатъ и двѣ точки, черезъ которыя она проходитъ, а именно: точки $(-1,\ 2/3)$ и $(1,\ -2/3)$. Кромѣ того изъ уравненія (α) легко найти еще точки пересѣченія ея съ осью x; эти точки слѣдующія: $(-\sqrt{3},\ 0)$ и $(0,0)$ и $(\sqrt{3}, 0)$. Чтобы опредѣлить характеръ изгиба кривой въ различныхъ ея точкахъ, найдемъ вторую производную данной функціи:

$$y''=2x.$$

Такъ какъ $y''<0$ при $x<0$, $y''=0$ для $x=0$ и $y''>0$ при $x>0$, то кривая обращена вверхъ выпуклостью во всѣхъ ея точкахъ, имѣющихъ отрицательныя абсциссы, и вогнутостью во всѣхъ точкахъ, имѣющихъ положительныя абсциссы; начало координатъ есть точка перегиба (§ 134). Касательная въ точкѣ перегиба наклонена къ оси x подъ угломъ, тангенсъ котораго равенъ значенію y' при $x=0$, т.-е. -1 (§ 106). Этотъ уголъ равенъ 135^0. По этимъ даннымъ можно составить понятіе о формѣ кривой (черт. 62).



Черт. 62.

Примѣръ 2. *Изслѣдовать измѣненіе функціи*

$$y=e^{-x^2}\ .\ .\ .\ (\beta)$$

и построить ея графикъ.

Изъ уравненія (β) видно, что значенія функціи положительны при всѣхъ значеніяхъ x и одинаковы для тѣхъ значеній x, которыя отличаются только знаками. Кромѣ того то же уравненіе показываетъ, что $y=0$ для $x=\pm\infty$ и $y=1$ при $x=0$.

Возьмемъ производную данной функціи (форм. 86, 75 и 76):

$$y'=-2xe^{-x^2}.$$

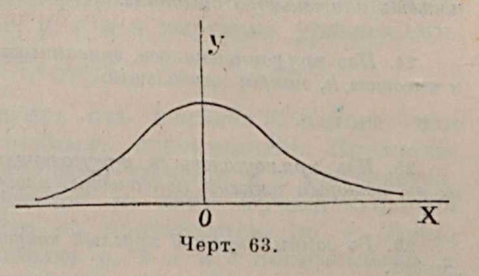
Такъ какъ $y'>0$ для $x<0$, $y'=0$ для $x=0$ и $y'<0$ для $x>0$, то разсматриваемая функція при измѣненіи x отъ $-\infty$

до *нуля* возрастаетъ отъ *нуля* до 1, а при дальнѣйшемъ измѣненіи x отъ *нуля* до $+\infty$ убываетъ отъ 1 до *нуля*, получая прежнія значенія, расположенныя въ обратномъ порядкѣ.

Вторая производная функціи такова:

$$y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

Она обращается въ нуль при $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, положительна при $x < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ и при $x > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ и отрицательна для значеній x, заключенныхъ между $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ и $+\frac{1}{2}\sqrt{2}$.



Черт. 63.

Графикомъ функціи служитъ кривая, расположенная въ области *положительныхъ* ординатъ, *симметричная* относительно оси y, имѣющая *наибольшую* ординату при $x = 0$ и *асимптотически* приближающаяся къ оси x. Она обращена вверхъ *вогнутостью* въ интервалахъ $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty\right)$ и *выпуклостью* въ интервалѣ $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$; точки $\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ суть ея точки *перегиба* (черт. 63).

Упражненія.

Изслѣдовать измѣненія и построить графики слѣдующихъ функцій:

1. $y = x^3$.
2. $y = 2x^3 + 3x^2 - 6x - 4$.
3. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.
4. $y = \frac{2x}{1 - x^2}$.
5. $y = x^3 - 12x^2 + 36x$.
6. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x$.
7. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
8. $y = x(15 - x)^2$.
9. $y = x^4 - 5x^2 + 4$.
10. $y = 1 + \frac{4x + 1}{x^2}$.
11. $y = x\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$, $a > 0$.
12. $y = x\sqrt{\frac{x}{a - x}}$, $a > 0$.
13. $y = sinx$.
14. $y = cosx$.
15. $y = tanx$.
16. $y = cotx$.
17. $y = secx$.
18. $y = cosecx$.

Найти maximum и minimum функцій:

19. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$. *Отв. Max. при* $x=1$, *min. при* $x=-1$

20. $\frac{x(x^2+1)}{x^4-x^2+1}$. *Отв. Max. при* $x=1$, *min. при* $x=-1$.

21. xe^{-x}. *Отв. Max. при* $x=1$.

22. $x\log x$. *Отв. Min. при* $x=e^{-1}$.

23. *Изъ прямоугольниковъ съ периметромъ* $2p$ *найти тотъ, который имѣетъ наименьшую діагональ.*

Отв. Квадратъ.

24. *Изъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ треугольникъ съ основаніемъ* b *и высотою* h, *найти наибольшій.*

Отв. Основ. прям. $=\frac{1}{2}b$.

25. *Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ съ данной гипотенузой найти тотъ, который имѣетъ наибольшую площадь.*

Отв. Равнобедренный.

26. *Въ данный прямой круглый конусъ вписать наибольшій круглый цилиндръ.*

Отв. Высота цилиндра $=\frac{1}{3}$ *высоты конуса.*

27. *Изъ прямыхъ круглыхъ цилиндровъ даннаго объема найти тотъ, который имѣетъ наименьшую полную поверхность.*

Отв. Діаметръ основанія равенъ высотѣ.

28. *Какой секторъ даннаго круга образуетъ боковую поверхность конуса съ наибольшимъ объемомъ?*

Отв. Уголъ сектора $=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ *или приблизительно* 294^0.

29. *Дана прямая* MN *и точки* A *и* B, *лежащія внѣ и по одну сторону ея. Найти на прямой* MN *такую точку* P, *чтобы сумма* $AP+PB$ *была наименьшая.*

Отв. Если $PL\perp MN$, *то* $\angle APL=\angle BPL$ *(законъ отраженія).*

30. *Дана прямая* MN *и точки* A *и* B *внѣ и по разныя стороны ея. Точка движется изъ точки* A *къ нѣкоторой точкѣ* P *прямой* MN *по отрѣзку* AP *со скоростью* v_1, *а затѣмъ къ точкѣ* B *по отрѣзку* PB *со скоростью* v_2. *Опредѣлить положеніе точки* P *такъ, чтобы время, затраченное на прохожденіе пути* APB, *было наименьшее.*

Отв. Если прямая $L'PL\perp MN$, *то*
$\sin\angle APL:\sin\angle BPL'=v_1:v_2$
(законъ преломленія).

31. *Въ точкахъ* A *и* B *помѣщены два источника тепла, интенсивности которыхъ суть соотвѣтственно* α *и* β. *На прямой* AB *найти наименѣе нагрѣваемую точку* M, *если извѣстно, что интенсивность нагрѣванія обратно пропорціональна квадрату разстоянія отъ источника тепла.*

Отв. $AM=\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}AB$.

ГЛАВА XII.

Частныя производныя и частные дифференціалы. Полный дифференціалъ. Дифференцированіе сложныхъ и неявныхъ функцій.

§ 138. **Частныя производныя и частные дифференціалы. Полный дифференціалъ.** Пусть u есть функція трехъ независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z, непрерывная относительно каждаго изъ нихъ. Зависимость между x, y, z и u выразимъ уравненіемъ:

$$u = f(x,y,z).$$

Измѣненіе функціи u зависитъ отъ измѣненій одного, или двухъ, или всѣхъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ. Предполагая, что y и z сохраняютъ постоянныя значенія, а x измѣняется, мы можемъ разсматривать функцію u, какъ функцію одного только перемѣннаго x, и найти ея производную по x. Точно также можно считать перемѣннымъ y, а x и z постоянными и искать производную по y, или считать перемѣннымъ z, а x и y постоянными и искать производную по z.

Эти три производныя функціи u называются *частными* производными функціи u соотвѣтственно по x, по y, по z и обозначаются символами $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ или символами u'_x, u'_y, u'_z.

По опредѣленію производной имѣемъ (§ 105):

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x,y,z) - f(x,y,z)}{\Delta x};$$

$$\frac{du}{dy} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x,y+\Delta y,z) - f(x,y,z)}{\Delta y};$$

$$\frac{du}{dz} = \lim_{\Delta z = 0} \frac{f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

Произведеніе частной производной функціи по нѣкоторому перемѣнному на дифференціалъ этого перемѣннаго называется *частнымъ дифференціаломъ функціи по этому перемѣнному* (см. § 129).

Частный дифференціалъ функціи u по перемѣнному x обозначается символомъ $d_x u$.

По опредѣленію частныхъ дифференціаловъ имѣемъ равенства:

$$d_x u = \frac{du}{dx}dx, \quad d_y u = \frac{du}{dy}dy, \quad d_z u = \frac{du}{dz}dz.$$

Сумма частныхъ дифференціаловъ функціи по всѣмъ перемѣннымъ, отъ которыхъ она зависитъ, называется *полнымъ дифференціаломъ* и обозначается символомъ du:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (90)$$

Все, сказанное здѣсь о функціи трехъ независимыхъ перемѣнныхъ, распространяется на функцію произвольнаго числа перемѣнныхъ.

Примѣръ. Найти частныя производныя, частные дифференціалы и полный дифференціалъ функціи:

$$u = arctan\,\frac{x}{y}.$$

Дифференцируя по x, находимъ (форм. 75, 83, 76):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

дифференцируя по y, получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

Частные и полный дифференціалы функціи выражаются слѣдующими формулами:

$$d_x u = \frac{ydx}{x^2 + y^2}; \quad d_y u = \frac{-xdy}{x^2 + y^2};$$

$$du = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}.$$

§ 139. **Дифференцированіе сложныхъ функцій.** *Сложной* функціей перемѣннаго x называется функція вида $f(u, v, w, \ldots)$, гдѣ $u, v, w, \ldots$ суть функціи перемѣннаго x.

Для опредѣленности возьмемъ функцію y, зависящую отъ трехъ функцій u, v, w независимаго перемѣннаго x:

$$y = f(u, v, w) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Требуется найти производную функціи y по перемѣнному x.

Обозначимъ соотвѣтственныя приращенія перемѣнныхъ x, u, v, w и y черезъ Δx, Δu, Δv, Δw и Δy.

Изъ уравненія (α) находимъ

$$y + \Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w).$$

Вычитая почленно изъ этого уравненія уравненіе (α), получимъ выраженіе для Δy:

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v, w).$$

Это выраженіе посредствомъ прибавленія ко второй части и вычитанія изъ него одного и того же выраженія можно преобразовать въ сумму трехъ разностей:

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v + \Delta v, w + \Delta w) +$$
$$+ f(u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v, w + \Delta w) +$$
$$+ f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w).$$

Первая разность есть приращеніе функціи f, когда перемѣнное u измѣняется на Δu, а два другихъ сохраняютъ постоянныя значенія $v + \Delta v$ и $w + \Delta w$; вторая разность есть приращеніе той же функціи, когда перемѣнное v измѣняется на Δv, а остальныя сохраняютъ постоянное значеніе u и $w + \Delta w$; наконецъ, третья разность есть приращеніе функціи f, когда перемѣнное w измѣняется на Δw, а остальныя сохраняютъ постоянныя значенія u и v.

Допуская, что функція f непрерывна относительно каждаго изъ перемѣнныхъ u, v и w, что она имѣетъ производныя по этимъ перемѣннымъ (т.-е. *частныя* производныя по u, v и w) и что эти производныя непрерывны, мы можемъ къ каждой изъ указанныхъ разностей приложить теорему *Lagrange*'а о конечныхъ приращеніяхъ (§ 136). Пользуясь этой теоремой, получимъ:

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v + \Delta v, w + \Delta w) =$$
$$= f'_u(u + \vartheta_1 \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) \,.\, \Delta u,$$
$$f(u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v, w + \Delta w) = f'_v(u, v + \vartheta_2 \Delta v, w + \Delta w) \,.\, \Delta v,$$
$$f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w) = f'_w(u, v, w + \vartheta_3 \Delta w) \,.\, \Delta w,$$

гдѣ ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3 суть числа, заключенныя между 0 и 1.

Такъ какъ частныя производныя f'_u, f'_v и f'_w по предположенію непрерывны, то

$$f'_u(u + \vartheta_1 \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) = f'_u(u, v, w) + \varepsilon_1,$$
$$f'_v(u, v + \vartheta_2 \Delta v, w + \Delta w) = f'_v(u, v, w) + \varepsilon_2,$$
$$f'_w(u, v, w + \vartheta_3 \Delta w) = f'_w(u, v, w) + \varepsilon_3,$$

при чемъ $\lim \varepsilon_1 = \lim \varepsilon_2 = \lim \varepsilon_3 = 0$, при $\Delta x = 0$.

При помощи этихъ формулъ выраженіе приращенія Δy функціи y принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\Delta y = f'_u(u,v,w)\Delta u + f'_v(u,v,w)\Delta v + f'_w(u,v,w)\Delta w + \\ + \varepsilon_1\Delta u + \varepsilon_2\Delta v + \varepsilon_3\Delta w.$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на Δx и переходя къ предѣлу при $\Delta x = 0$, получимъ для производной функціи y слѣдующее выраженіе:

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u,v,w)\frac{du}{dx} + f'_v(u,v,w)\frac{dv}{dx} + f'_w(u,v,w)\frac{dw}{dx},$$

или въ другихъ обозначеніяхъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx} \quad . \; . \; . \; . \quad (91)$$

Частный и простѣйшій случай этой формулы представляетъ формула (75).

Умноживъ обѣ части послѣдняго равенства на dx, получимъ выраженіе дифференціала сложной функціи:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw.$$

Сравненіе этой формулы съ формулой (90) показываетъ, что выраженія дифференціаловъ функціи многихъ независимыхъ перемѣнныхъ и функціи сложной одинаковы по формѣ; но эти формулы различны по смыслу символовъ, обозначающихъ дифференціалы перемѣнныхъ: въ формулѣ (90) dx, dy и dz суть произвольныя, независящія другъ отъ друга и постоянныя относительно перемѣнныхъ числа, между тѣмъ какъ въ послѣдней формулѣ du, dv и dw суть функціи перемѣннаго x, умноженныя на произвольное, постоянное относительно x число dx.

Примѣръ. Найти производную функціи

$$y = u^v,$$

гдѣ u и v суть функціи x.

По формулѣ (91) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Но (форм. 76, 85)

$$\frac{\partial y}{\partial u} = vu^{v-1}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u^v\, log u.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{dy}{du} = u^{v-1}\left(v\frac{du}{dx} + ulogu\frac{dv}{dx}\right).$$

Прилагая эту формулу къ частному случаю, когда $u = v = x$, получимъ производную функціи x^x:

$$\frac{d(x^x)}{dx} = x^x(1 + logx).$$

(Срав. § 127).

§ 140. **Дифференцированіе неявной функціи.** Если зависимость между перемѣннымъ x и функціей y выражена уравненіемъ

$$f(x,y) = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

не рѣшеннымъ относительно y, то функція y называется *неявной* функціей x (срав. § 21).

Покажемъ, что, пользуясь правиломъ дифференцированія сложныхъ функцій (§ 139), можно опредѣлить производную функціи y, не рѣшая уравненія (α).

Дѣйствительно, первая часть уравненія (α) есть сложная функція x, зависящая отъ самаго перемѣннаго x и его функціи y.

Поэтому по формулѣ (91) имѣемъ:

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

или

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

гдѣ $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ суть частныя производныя функція $f(x,y)$ по x и по y.

Но по уравненію (α) функція $f(x,y)$ сохраняетъ постоянное значеніе. Поэтому (§ 107) ея производная равна нулю, т.-е.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Отсюда легко опредѣлить $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (92)$$

Примѣръ. Найти производную функціи y, опредѣляемой уравненіемъ:

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

По формулѣ (92) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial}{\partial x}[x^3+y^3-3axy]}{\frac{\partial}{\partial y}[x^3+y^3-3axy]}=-\frac{3x^2-3ay}{3y^2-3ax}=\frac{x^2-ay}{ax-y^2}.$$

Замѣчаніе. Указанный выше пріемъ опредѣленія производной неявной функціи одного перемѣннаго можно приложить къ опредѣленію частныхъ производныхъ неявной функціи многихъ перемѣнныхъ.

Такъ, напр., если функція z двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y опредѣляется уравненіемъ

$$f(x,y,z)=0,$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}.$$

§ 141. **Частные производныя и дифференціалы высшихъ порядковъ.** Пусть имѣемъ функцію u двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y: $u=f(x,y)$. Каждая изъ ея двухъ частныхъ производныхъ (§ 138) $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ есть также функція перемѣнныхъ x и y. Дифференцируя каждую изъ нихъ по каждому изъ этихъ перемѣнныхъ, получимъ ихъ частныя производныя, которыя называются частными производными *второго порядка* функціи u. Для нихъ употребляются слѣдующія обозначенія:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y};\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x};\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Частныя производныя $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ получаютъ названіе частныхъ производныхъ *перваго* порядка.

Частныя производныя частныхъ производныхъ второго порядка называются частными производными *третьяго* порядка данной функціи и т. д.

Символы, употребляемые для ихъ обозначенія, аналогичны указаннымъ выше символамъ для обозначенія частныхъ произ-

водныхъ второго порядка. Напр., $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ обозначаетъ частную производную третьяго порядка функціи u, являющуюся результатомъ двукратнаго послѣдовательнаго дифференцированія функціи u по перемѣнному x и дифференцированія по перемѣнному y.

Изъ частныхъ производныхъ второго порядка функціи u двѣ, а именно $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, отличаются только порядкомъ, въ которомъ совершаются дифференцированія по перемѣннымъ x и y. Для полученія первой изъ нихъ функція u дифференцируется сначала по x и полученный результатъ дифференцируется по y; для полученія второй функція u дифференцируется сначала по y и полученный результатъ по x. Перемѣна въ порядкѣ послѣдовательныхъ дифференцированій не оказываетъ вліянія на результатъ, такъ что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Это свойство частныхъ производныхъ высшихъ порядковъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ: *результатъ послѣдовательныхъ дифференцированій функціи многихъ перемѣнныхъ не зависитъ отъ порядка частныхъ дифференцированій* *).

Въ § 138 было дано опредѣленіе частныхъ дифференціаловъ функціи многихъ перемѣнныхъ и ея полнаго дифференціала. Приложеніе этихъ опредѣленій къ частнымъ дифференціаламъ данной функціи приводитъ къ ея *вторымъ* частнымъ и полному дифференціаламъ. Такъ, напр., для функціи $u = f(x,y)$ имѣемъ (§ 138):

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Отсюда не трудно найти частные и полный дифференціалы 2-го порядка функціи u:

$$d_x(d_x u) = d^2_{xx} u = d_x\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2;$$

$$d_y(d_x u) = d^2_{xy} u = d_y\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy;$$

$$d_x(d_y u) = d^2_{yx} u = d_x\left(\frac{\partial u}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} dy dx;$$

*) Доказательство этого предложенія можно найти въ подробныхъ курсахъ дифференціальнаго исчисленія.

$$d_y(d_y u) = d^2_{yy} u = d_y\left(\frac{\partial u}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2;$$

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2.$$

Отъ дифференціаловъ второго порядка тѣмъ же способомъ переходимъ къ дифференціаламъ третьяго порядка и т. д.

Примѣръ. Въ § 138 были найдены частныя производныя и частные и полный дифференціалы функціи

$$u = arctan\,\frac{x}{y}.$$

Найдемъ частныя производныя и частные и полный дифференціалы второго порядка этой функціи.

Дифференцируя по x и y формулы (§ 138)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

находимъ частныя производныя второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Частные и полный дифференціалы второго порядка даются формулами:

$$d^2_{xx} u = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx^2;\ d^2_{xy} u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy;\ d^2_{yy} u = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy^2;$$

$$d^2 u = \frac{2\left\{-xy dx^2 + (x^2 - y^2) dx dy + xy dy^2\right\}}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Упражненія.

Найти частныя производныя, частные дифференціалы и полный дифференціалъ слѣдующихъ функцій:

1. $u = xyz$. *Отв.* $du = yzdx + zxdy + xydz$.

2. $u = log\,\frac{x+y}{x-y}$. *Отв.* $du = \frac{2(xdy - ydx)}{x^2 - y^2}$.

3. $u = arccos \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}}$.

Отв. $du = \frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2}$.

4. $u = logsin \frac{x}{y}$.

Отв. $du = \frac{ydx - xdy}{y^2} \cdot cot \frac{x}{y}$.

5. *Функція y опредѣляется уравненіемъ:*

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Найти y'.

Отв. $y' = \frac{a^2x - (x^2 + y^2 - bx)(2x - b)}{y[2(x^2 + y^2 - bx) - a^2]}$.

6. *Найти производную функціи y, опредѣляемой уравненіемъ:*

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2} = C.$$

Отв. $y' = \frac{x}{y} \cdot \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2}}$.

7. *Найти производную функціи y, опредѣляемой уравненіемъ:*

$$a^{x-y} - x^y = 0.$$

Отв. $y' = \frac{xloga - y}{xlogax}$.

ГЛАВА XIII.

Задача интегральнаго исчисленія. Интегралъ неопредѣленный и опредѣленный. Геометрическое значеніе интеграла. Интегралъ, какъ предѣлъ суммы. Основные интегралы. Интегрированіе черезъ подстановку и по частямъ.

§ 142. Задача интегральнаго исчисленія. Неопредѣленный интегралъ. Задача *дифференціальнаго* исчисленія заключается въ опредѣленіи *производной или дифференціала данной функціи.*

Задача *интегральнаго* исчисленія состоитъ въ нахожденіи *функціи по ея производной или дифференціалу.*

Пусть дана функція $f(x)$. Если $F(x)$ есть такая функція, что

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx,$$

то $F(x)$ называется *первообразной* функціей относительно функціи $f(x)$ или ея *интеграломъ* и обозначается знакомъ $\int f(x)dx$, такъ что

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Извѣстно, что прибавленіе постояннаго числа къ функціи $F(x)$ не измѣняетъ ея производной (§§ 108, 107). Поэтому, если $F(x)$ есть интегралъ функціи $f(x)$, то и функція $F(x)+C$, гдѣ C есть произвольное постоянное число, служитъ также интеграломъ функціи $f(x)$.

Обратно, если $F_1(x)$ и $F(x)$ суть интегралы функціи $f(x)$, то $F_1(x) = F(x) + C$, гдѣ C есть постоянное.

Дѣйствительно, пусть $\varphi(x) = F_1(x) - F(x)$. Такъ какъ, по условію, $F_1'(x) = F'(x) = f(x)$, то $\varphi'(x) = 0$ для всѣхъ значеній x. Прилагая къ функціи $\varphi(x)$ теорему Лагранжа о конечномъ приращеніи (§ 136), находимъ:

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} = \varphi'(\xi),$$

гдѣ x_1 и x_2 суть какія-нибудь два значенія перемѣннаго x, а ξ есть число, лежащее между x_1 и x_2. Такъ какъ $\varphi'(\xi) = 0$, то $\varphi(x_2) = \varphi(x_1) = C$, гдѣ C обозначаетъ постоянное число. Слѣд., $F_1(x) - F(x) = C$ и $F_1(x) = F(x) + C$.

Итакъ, самая общая форма интеграла $\int f(x)dx$ есть $F(x) + C$, гдѣ C есть произвольное постоянное. Изъ этого слѣдуетъ, что задача о нахожденіи интеграла данной функціи есть задача *неопредѣленная*; поэтому интегралъ $\int f(x)dx$ называется *неопредѣленнымъ интеграломъ*.

Эту неопредѣленность можно устранить, наложивъ на искомый интегралъ добавочное условіе, чтобы искомая функція принимала *данное* значеніе при *данномъ* значеніи перемѣннаго.

Пусть, напр., требуется найти интегралъ функціи $f(x)$, обращающійся въ *нуль* при $x = x_0$. Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$F(x_0) + C = 0.$$

Опредѣливъ отсюда C, находимъ, что искомый интегралъ есть $F(x) - F(x_0)$.

Примѣры 1. $\int 2x dx = x^2 + C$, потому что $\frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x$.

2. $\int \cos x dx = \sin x + C$, потому что $\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$, потому что $\frac{d}{dx}(\log x + C) = \frac{1}{x}$.

Если въ первомъ примѣрѣ добавимъ требованіе, чтобы интегралъ обращался въ нуль при $x = 1$, то найдемъ, что $C = -1$, и искомый интегралъ будетъ $x^2 - 1$.

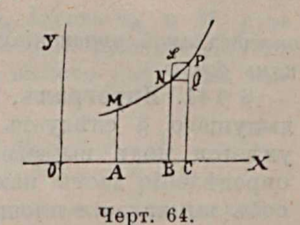
Точно также во второмъ примѣрѣ $sin x$ есть тотъ интегралъ, который обращается въ нуль при $x = 0$, а въ третьемъ примѣрѣ $log x$ есть тотъ интегралъ, который обращается въ нуль при $x = 1$.

§ 143. **Геометрическое значеніе интеграла.** Пусть кривая, отнесенная къ прямоугольной системѣ осей координатъ, опредѣляется уравненіемъ:

$$y = f(x),$$

гдѣ $f(x)$ есть непрерывная функція, имѣющая положительныя значенія для тѣхъ значеній x, при которыхъ мы будемъ ее разсматривать.

Проведя ординату AM (черт. 64), соотвѣтствующую нѣкоторой опредѣленной абсциссѣ $OA = x_0$, и ординату BN, соотвѣтствующую какой-нибудь абсциссѣ $OB = x (x > x_0)$, мы получимъ площадь $AMNB$, ограниченную отрѣзкомъ оси x, дугой данной кривой и двумя ординатами.



Черт. 64.

Измѣняя абсциссу x, мы измѣняемъ положеніе ординаты BN и, слѣд., измѣняемъ площадь, которая является, такимъ образомъ, функціей перемѣннаго x. Назовемъ ее черезъ u.

Дадимъ абсциссѣ x настолько малое приращеніе $BC = \Delta x$, чтобы при измѣненіи x отъ x до $x + \Delta x$ ординаты соотвѣтственной дуги NP постоянно или возрастали, или убывали. Соотвѣтственное приращеніе площади u обозначимъ черезъ Δu.

Построивъ ординату CP, соотвѣтствующую абсциссѣ $OC = x + \Delta x$, и проведя черезъ точки N и P прямыя, параллельныя оси x, до встрѣчи съ ординатами CP и BN соотвѣтственно въ точкахъ Q и L, находимъ, что $\Delta u = BNPC$ заключено между площадями двухъ прямоугольниковъ: $BNQC$ и $BLPC$. А такъ какъ

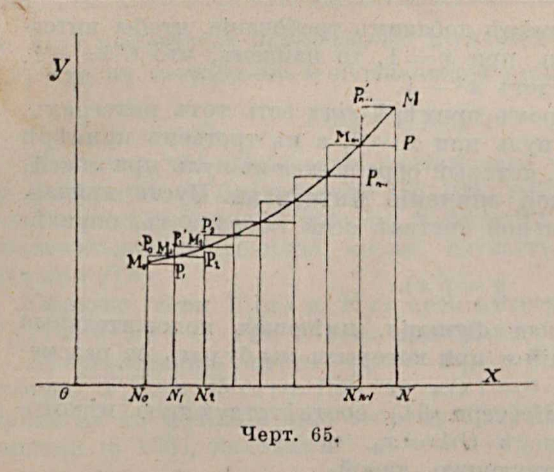
$$\text{пл. } BNQC = BN \,.\, BC = f(x) \,.\, \Delta x,$$
$$\text{пл. } BLPC = CP \,.\, BC = f(x + \Delta x) \,.\, \Delta x,$$

то имѣютъ мѣсто неравенства:

$$f(x) \,.\, \Delta x \gtreqless \Delta u \gtreqless f(x + \Delta x) \Delta x.$$

Раздѣливъ почленно эти неравенства на Δx, получимъ:

$$f(x) \gtreqless \frac{\Delta u}{\Delta x} \gtreqless f(x + \Delta x).$$



Черт. 65.

Переходя къ предѣлу при $\Delta x = 0$ и принимая во вниманіе, что функція $f(x)$ непрерывна и что $\lim f(x+\Delta x) = f(x)$ при $\Delta x = 0$, находимъ:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} = f(x).$$

Отсюда слѣдуетъ, что u есть интегралъ функціи $f(x)$.

Итакъ, *неопредѣленный интегралъ* $\int f(x)dx$ *выражаетъ площадь, ограниченную дугой кривой, опредѣляемой уравненіемъ* $y=f(x)$, *двумя ея ординатами и отрѣзкомъ оси* x.

§ 144. **Интегралъ, какъ предѣлъ суммы.** Разсужденіе предыдущаго § слѣдуетъ пополнить опредѣленіемъ того, что разумѣется подъ выраженіемъ: *площадь, ограниченная кривой.* Такое опредѣленіе дастъ намъ общій способъ вычисленія площади, выяснить сущность процесса, называемаго интегрированіемъ и вмѣстѣ съ тѣмъ доставитъ доказательство существованія интеграла функціи, удовлетворяющей нѣкоторымъ условіямъ.

Черт. 66.

Пусть $y=f(x)$ есть уравненіе кривой, отнесенной къ прямоугольной системѣ осей координатъ (черт. 65 и 66). Подъ $f(x)$ будемъ разумѣть, какъ и въ предыдущемъ §, непрерывную и положительную функцію въ интервалѣ (x_0, x), гдѣ $x > x_0$.

Раздѣливъ отрѣзокъ $N_0N = x - x_0$ на n частей (равныхъ или неравныхъ), построимъ въ точкахъ дѣленія N_0, N_1, N_2,.., N_{n-1}, N ординаты N_0M_0, N_1M_1,.., $N_{n-1}M_{n-1}$, NM кривой и черезъ концы этихъ ординатъ проведемъ прямыя, параллельныя оси x, до встрѣчи съ сосѣдними ординатами. Такимъ образомъ мы получимъ двѣ ломаныя линіи: $M_0P_1M_1P_2M_2..P_{n-1}M_{n-1}PM$ и $P_0M_1P'_1M_2P'_2...P'_{n-1}M$. Первую изъ нихъ назовемъ *входящей*, а вторую — *выходящей.* Каждая изъ нихъ вмѣстѣ съ крайними ординатами и отрѣзкомъ NN_0 оси x ограничиваетъ площадь, состоящую изъ ряда прямоугольниковъ.

Если абсциссу точки P_k обозначимъ черезъ x_k, то легко видѣть, что площадь Σ_n входящей ломаной и площадь Σ'_n выходящей ломаной выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$\Sigma_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (x - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$
$$\Sigma'_n = (x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \ldots + (x - x_{n-1})f(x),$$

при чемъ изъ самаго способа полученія чиселъ x со значками слѣдуетъ, что

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Докажемъ, что при безграничномъ возрастаніи числа n интерваловъ, на которые разбивается первоначальный интервалъ (x_0, x), и безграничномъ уменьшеніи каждаго изъ нихъ суммы Σ_n и Σ'_n стремятся къ одному и тому же предѣлу, и *этотъ общій предѣлъ примемъ за выраженіе площади, ограниченной дугой M_0M данной кривой, двумя ея ординатами и отрѣзкомъ оси x.*

Для этого разсмотримъ сначала сумму Σ_n. Пусть m_k и M_k суть соотвѣтственно *наибольшее* и *наименьшее* значенія функціи $f(x)$ въ интервалѣ (x_{k-1}, x_k). Подставляя m_k и M_k вмѣсто $f(x_{k-1})$ въ выраженіе суммы Σ_n, получимъ двѣ суммы:

$$s_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x - x_{n-1});$$
$$S_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x - x_{n-1}).$$

Нетрудно видѣть, что при возрастаніи числа n интерваловъ и уменьшеніи каждаго изъ нихъ сумма s_n возрастаетъ (или, по крайней мѣрѣ, не убываетъ), а сумма S_n убываетъ (или, по крайней мѣрѣ, не возрастаетъ). Дѣйствительно, пусть, наприм., интервалъ (x_{k-1}, x_k) разбитъ на два интервала: (x_{k-1}, ξ) и (ξ, x_k), гдѣ $x_{k-1} < \xi < x_k$. Въ такомъ случаѣ членъ $m_k(x_k - x_{k-1})$ суммы s_n, соотвѣтствующій интервалу (x_{k-1}, x_k) замѣнится суммою: $m'_k(\xi - x_{k-1}) + m''_k(x_k - \xi)$, въ которой m'_k и m''_k суть наименьшія значенія $f(x)$ въ интервалахъ (x_{k-1}, ξ) и (ξ, x_k). Такъ какъ

$$m'_k \geqslant m_k, \ m''_k \geqslant m_k,$$

то

$$m'_k(\xi - x_{k-1}) + m''_k(x_k - \xi) \geqslant m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Кромѣ того сравненіе суммъ s_n и S_n приводитъ къ заключенію, что

$$s_n < S_n.$$

Итакъ, при безграничномъ возрастаніи n сумма s_n возрастаетъ, но остается меньше S_n, а сумма S_n убываетъ, но остается больше s_n.

Слѣд. (§ 102), та и другая сумма стремятся къ нѣкоторымъ предѣламъ при возрастаніи n до ∞.

Докажемъ теперь, что эти предѣлы одинаковы.

Для этого составимъ разность разсматриваемыхъ суммъ:

$S_n - s_n = (M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + (M_2 - m_2)(x_2 - x_1) + \ldots + (M_n - m_n)(x - x_{n-1})$.

Обозначивъ черезъ δ наибольшую изъ разностей $M_k - m_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) и подставляя δ вмѣсто этихъ разностей въ выраженіе $S_n - s_n$, получимъ неравенство:

$$S_n - s_n < \delta(x - x_0).$$

Но, вслѣдствіе непрерывности функціи $f(x)$, при возрастаніи числа n интерваловъ и уменьшеніи каждаго изъ нихъ δ уменьшается и можетъ быть сдѣлано меньше произвольнаго числа; поэтому

$$\lim_{n=\infty} (S_n - s_n) = 0 \text{ и } \lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} s_n.$$

Сравнивая суммы s_n, S_n и Σ_n, находимъ

$$s_n < \Sigma_n < S_n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что Σ_n при возрастаніи n до ∞ стремится къ тому же предѣлу, къ которому стремятся суммы s_n и S_n. Этотъ предѣлъ зависитъ только отъ x_0 и x, т.-е. отъ начальнаго и конечнаго значеній перемѣннаго x, и не зависитъ отъ способа дѣленія интервала (x_0, x).

Тѣмъ же способомъ можно доказать, что и сумма Σ'_n при возрастаніи n до ∞ стремится къ опредѣленному предѣлу, зависящему только отъ x_0 и x. Кромѣ того, повторяя разсужденія, которыми мы воспользовались для доказательства равенства предѣловъ суммъ s_n и S_n, легко показать, что суммы Σ_n и Σ'_n стремятся къ одному и тому же предѣлу при возрастаніи n до ∞. Обозначимъ этотъ предѣлъ черезъ $F(x, x_0)$.

Если $h > 0$ и ограниченія, наложенныя на функцію $f(x)$, имѣютъ мѣсто въ интервалѣ $(x, x+h)$, то ясно, что символъ $F(x+h, x)$ представитъ предѣлы суммъ, аналогичныхъ Σ_n и Σ'_n, но отнесенныхъ къ этому интервалу, а $F(x+h, x_0)$ будетъ не что иное, какъ сумма $F(x, x_0) + F(x+h, x)$, такъ что

$$F(x+h, x) = F(x+h, x_0) - F(x, x_0).$$

Отсюда на основаніи предыдущаго слѣдуетъ, что, если M и m суть соотвѣтственно *наибольшее* и *наименьшее* значенія функціи $f(x)$ въ интервалѣ $(x+h, x)$, то

$$mh < F(x+h, x_0) - F(x, x_0) < Mh,$$
$$m < \frac{F(x+h, x_0) - F(x, x_0)}{h} < M.$$

Такъ какъ при уменьшеніи h до нуля числа m и M стремятся къ $f(x)$, то первая цѣпь неравенствъ показываетъ *непрерывность*

функціи $F(x, x_0)$ въ интервалѣ (x_0, x), а вторая даетъ ея *производную*:

$$\frac{dF(x, x_0)}{dx} = \lim_{h=0} \frac{F(x+h, x_0) - F(x, x_0)}{h} = f(x).$$

Пересматривая приведенныя выше разсужденія, не трудно замѣтить, что *непрерывность* функціи $f(x)$ играла въ нихъ существенную роль, между тѣмъ какъ требованія $f(x) > 0$ и $x > x_0$, а, слѣд., и $h > 0$, были введены для простоты изложенія и не представляютъ необходимыхъ условій для окончательныхъ выводовъ. Поэтому результатъ предыдущихъ разсужденій можно формулировать слѣдующимъ образомъ: *если $f(x)$ есть функція, непрерывная въ интервалѣ (x_0, x), то существуетъ единственная функція $F(x, x_0)$, которая обладаетъ слѣдующими свойствами*: 1) *она непрерывна въ интервалѣ (x_0, x)*; 2) *она обращается въ нуль при $x = x_0$*; 3) *ея производная равна $f(x)$*.

Принимая во вниманіе свойства 2) и 3), назовемъ функцію $F(x, x_0)$ *опредѣленнымъ интеграломъ* функціи $f(x)$ (сравн. § 142). Онъ обозначается символомъ $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$, гдѣ знакъ $\int$ (вытянутая латинская буква S, начальная буква слова: «*summa*») напоминаетъ, что функція $F(x, x_0)$ есть предѣлъ извѣстной суммы. Числа x_0 и x называются соотвѣтственно *нижнимъ* и *верхнимъ предѣлами* интеграла.

Если $F(x)$ есть одна изъ функцій, производная которыхъ равна $f(x)$, то (§ 142)

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = F(x) - F(x_0).$$

Эта формула устанавливаетъ связь между *неопредѣленнымъ* и *опредѣленнымъ* интегралами.

Итакъ,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \lim \left\{ (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (x - x_{n-1})f(x_{n-1}) \right\}.$$

Сумму второй части этого равенства сокращенно обозначаютъ символомъ $\sum_{x_0}^{x} f(x)\Delta x$, указывая *типъ* слагаемыхъ и *предѣлы* суммированія, такъ что

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \lim \sum_{x_0}^{x} f(x)\Delta x.$$

§ 145. **Примѣръ вычисленія интеграла, какъ предѣла суммы**. Пусть требуется вычислить $\int_0^x x^2dx$.

Раздѣлимъ интервалъ $(0, x)$ на n *равныхъ* частей и обозначимъ каждую изъ нихъ h:

$$h = \frac{x}{n}.$$

Вставляя между 0 и x $n-1$ равноотстоящихъ чиселъ, получимъ рядъ

$$0,\ h,\ 2h,..,(n-1)h,\ x,$$

который соотвѣтствуетъ ряду

$$x_0,\ x_1,\ x_2,..x_{n-1},\ x$$

предыдущаго §.

Составляя сумму s_n, получимъ:

$$s_n = h\left\{h^2 + (2h)^2 + .. + [(n-1)h]^2\right\} = h^3\left\{1^2 + 2^2 + .. + (n-1)^2\right\}.$$

Такъ какъ

$$1^2 + 2^2 + .. + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

то

$$s_n = h^3\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{x^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Переходя къ предѣлу при $n=\infty$, находимъ:

$$\lim_{n=\infty} s_n = x^3.\ \lim_{n=\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{x^3}{6}\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{x^3}{3}.$$

Но $\lim\limits_{n=\infty} s_n = \int_0^x x^2dx$. Слѣд., $\int_0^x x^2dx = \frac{x^3}{3}$.

Съ геометрической точки зрѣнія приведенное выше вычисленіе есть вычисленіе площади, ограниченной параболой $y=x^2$, двумя ея ординатами и отрѣзкомъ оси x между ними.

Упражненіе. *Вычислить интегралъ* $\int_a^b xdx$, *какъ предѣлъ суммы, и указать его геометрическое значеніе.*

§ 146. **Интегрированіе функцій или квадратура.** Вычисленіе интеграла данной непрерывной функціи, существованіе котораго

было доказано въ § 144, называется *интегрированiемъ* или *квадратурой*, при чемъ послѣднее названiе указываетъ на геометрическiй смыслъ задачи, т.-е. на вычисленiе площади или опредѣленiе *квадрата*, равновеликаго этой площади.

Интегрированiе функцiй лишь въ немногихъ случаяхъ можетъ быть выполнено при помощи конечнаго числа комбинацiй элементарныхъ функцiй (алгебраическихъ и элементарныхъ трансцендентныхъ, см. § 22). Въ такихъ случаяхъ говорятъ, что интегралъ *«берется въ конечномъ видѣ»*. Въ большинствѣ же случаевъ интегрированiе приводитъ къ *новымъ трансцендентнымъ* функцiямъ.

Если бы, напр., намъ были извѣстны только алгебраическiя функцiи, то интегралы $\int\frac{dx}{1+x^2}$ и $\int\frac{dx}{x}$ явились бы новыми функцiями и привели бы къ введенiю въ анализъ *тригонометрiи* и ученiя о *логариѳмахъ*.

Первой задачей краткаго курса интегральнаго исчисленiя служитъ указанiе общихъ методовъ интегрированiя и простѣйшихъ случаевъ, въ которыхъ оно выполняется въ конечномъ видѣ. Этой задачѣ посвящены конецъ настоящей главы и двѣ слѣдующихъ.

§ 147. **Таблица основныхъ интеграловъ.** Пользуясь опредѣленiемъ интеграла (§ 142), легко составить таблицу *основныхъ интеграловъ*. Приводимая ниже таблица въ лѣвомъ столбцѣ содержитъ формулы дифференцiальнаго исчисленiя, а въ правомъ соотвѣтственныя формулы интегральнаго, при чемъ опущены произвольныя постоянныя интегрированiя.

$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x^n, \quad (n\neq-1)$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}, (n\neq-1)$ . . (93)
$\frac{d}{dx}logx=\frac{1}{x}$	$\int\frac{dx}{x}=logx$ . . . . (94)
$\frac{dsinx}{dx}=cosx$	$\int cosxdx=sinx$ . . . . . . (95)
$\frac{d(-cosx)}{dx}=sinx$	$\int sinxdx=-cosx$ . . . . . (96)
$\frac{dtanx}{dx}=\frac{1}{cos^2x}$	$\int\frac{dx}{cos^2x}=tanx$ . . . . . . (97)
$\frac{d(-cotx)}{dx}=\frac{1}{sin^2x}$	$\int\frac{dx}{sin^2x}=-cotx$ . . . . . . (98)
$\frac{darcsinx}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arcsinx$ . . . . (99)

$$\frac{d(-\arccos x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x \quad . \quad . \quad (100)$$

$$\frac{d\arctan x}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \qquad \int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

$$\frac{d(-\operatorname{arccot} x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \qquad \int\frac{dx}{1+x^2}=-\operatorname{arccot} x \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{a^x}{\log a}=a^x \qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\log a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

$$\frac{de^x}{dx}=e^x \qquad \int e^x dx=e^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Къ формуламъ этой таблицы добавимъ еще двѣ слѣдующія:

$$\int(u+v-w)dx=\int udx+\int vdx-\int wdx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

$$\int Af(x)dx=A\int f(x)dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

гдѣ u, v и w суть функціи x, а A есть постоянное относительно x число.

Формула (105) показываетъ, что *интегралъ алгебраической суммы равенъ алгебраической суммѣ интеграловъ слагаемыхъ*, а формула (106), что постоянный множитель можно выносить за знакъ интеграла (сравн. §§ 108, 109 слѣд.). Справедливость этихъ формулъ легко обнаружить, сравнивъ производныя правой и лѣвой части каждой изъ нихъ.

§ 148. **Интегрированіе черезъ подстановку.** Однимъ изъ общихъ пріемовъ, употребляемыхъ при интегрированіи функцій, является такъ называемый «*способъ подстановки*». Онъ заключается въ замѣнѣ перемѣннаго интегрированія новымъ перемѣннымъ.

Пусть $\int f(x)dx$ есть данный для вычисленія интегралъ. Введемъ вмѣсто x новое перемѣнное z, связанное съ x уравненіемъ:

$$x=\varphi(z).$$

Изъ этого уравненія черезъ дифференцированіе находимъ:

$$dx=\varphi'(z)dz.$$

Подставивъ выраженія x и dx черезъ z въ данный интегралъ, получимъ:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz=\int F(z)dz.$$

Можетъ случиться, что новый интегралъ $\int F(z)dz$ принадлежитъ къ числу основныхъ или окажется проще даннаго.

Въ такомъ случаѣ данная задача или рѣшена, или упрощена.

Примѣры. 1. Разсмотримъ интегралъ:

$$\int (x+a)^n dx, \quad n \neq -1.$$

Полагая $x+a=z$, находимъ $(x+a)^n = z^n$, $dx = dz$. Поэтому

$$\int (x+a)^n dx = \int z^n dz.$$

По формулѣ (93) находимъ

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C.$$

Слѣдовательно,

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C.$$

2. Посредствомъ той же подстановки интегралъ $\int \frac{dx}{x+a}$ приводится къ основному интегралу (94):

$$\int \frac{dx}{x+a} = log(x+a) + C.$$

3. Для вычисленія интеграла $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ сдѣлаемъ подстановку: $x=az$.

Такъ какъ $dx = adz$, то (форм. 106 и 101)

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dz}{a(1+z^2)} = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{a} arctan z + C.$$

Слѣд.,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctan \frac{x}{a} + C.$$

4. При помощи той же подстановки легко убѣдиться, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C.$$

§ 149. **Интегрированіе по частямъ.** Второй общій пріемъ, употребляемый при интегрированіи функцій, основанъ на обращеніи формулы (73), дающей производную произведенія двухъ функцій. Умноживъ обѣ части этой формулы на dx, получимъ:

$$d(uv) = udv + vdv.$$

Отсюда находимъ:

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Интегрируя это равенство, получимъ формулу:

$$\int udv = uv - \int vdu, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (107)$$

которая называется *формулой интегрированія по частямъ*. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ она позволяетъ привести данный интегралъ къ извѣстному или болѣе простому интегралу.

Примѣры. 1. Требуется найти $\int x\sin x dx$.

Полагая $u = x$, $dv = \sin x dx$, находимъ (форм. 96):

$$du = dx; \; v = -\cos x.$$

Подставляя эти значенія u и v въ формулу (107), получимъ:

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx.$$

Интегралъ второй части этого равенства есть одинъ изъ основныхъ интеграловъ (форм. 95). Пользуясь этой формулой, найдемъ, что

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

2. Требуется найти интегралъ $\int xe^x dx$.

Полагая $u = x$ и $dv = e^x dx$, имѣемъ: $du = dx$, $v = e^x$ (форм. 104). По формулѣ (107) получимъ:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

3. Требуется найти интегралъ $\int x^2\cos x dx$.

Полагая $u = x^2$ и $dv = \cos x dx$, находимъ (форм. 95):

$$du = 2xdx; \; v = \sin x.$$

Подставляя въ формулу (107) указанныя значенія u и v, получимъ:

$$\int x^2\cos x dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x dx.$$

Интегралъ второй части этого равенства былъ уже вычисленъ тѣмъ же пріемомъ интегрированія по частямъ (см. прим. 1). Подставивъ найденное для него значеніе въ послѣднее равенство, получимъ:

$$\int x^2\cos x dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

4. Требуется найти интегралъ $\int arcsinx dx$.

Полагая $u = arcsinx$ и $dv = dx$, находимъ:

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ v = x.$$

Подставляя эти значенія u и v въ формулу (107), получимъ:

$$\int arcsinx dx = x arcsinx - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для вычисленія интеграла второй части этого равенства положимъ $1 - x^2 = z^2$. Отсюда черезъ дифференцированіе найдемъ: $-xdx = zdz$. Поэтому

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{zdz}{z} = -\int dz = -z = -\sqrt{1-x^2}.$$

Слѣд., $\int arcsinx dx = x arcsinx + \sqrt{1-x^2} + C$.

5. Требуется найти интегралъ $\int sin^2 x dx$.

Полагая $u = sinx$ и $dv = sinx dx$, находимъ:

$$du = cosx dx,\ v = -cosx.$$

Подставляя эти значенія u и v въ формулу (107), получимъ:

$$\int sin^2 x dx = -sinx cosx + \int cos^2 x dx;$$

отсюда черезъ подстановку $1 - sin^2 x$ вмѣсто $cos^2 x$ по форм. (105) найдемъ:

$$\int sin^2 x dx = -sinx cosx + \int dx - \int sin^2 x dx.$$

Отсюда имѣемъ:

$$2\int sin^2 x dx = -sinx cosx + x,$$

$$\int sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - sinx cosx) + C.$$

Упражненія.

1. $\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$.

3. $\int \frac{dx}{1-x} = -\log(1-x)$.

4. $\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}$.

5. $\int \frac{3x^2dx}{a^3+x^3} = \log(a^3+x^3)$.

6. $\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\,arctan x^2$.

7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2}$.

8. $\int \tan x dx = \log \sec x$.

9. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$.

10. $\int \frac{\log x}{x}.\ dx = \frac{1}{2}(\log x)^2$.

11. $\int \sin x \,.\, \cos x dx = \frac{1}{2}\sin^2 x$.

12. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx = \log(1+\sin x)$.

13. $\int \frac{\sin x dx}{a+b\cos x} = -\frac{1}{b}\log(a+b\cos x)$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arcsin\frac{x-a}{a}$.

15. $\int x\log x dx = \frac{1}{2}x^2\left(\log x - \frac{1}{2}\right)$.

16. $\int x^3e^x dx = e^x(x^3-3x^2+6x-6)$.

17. $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}.e^{\alpha x}$.

18. $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}.e^{\alpha x}$.

19. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = x\tan x + \log\cos x$.

20. $\int arctan x.dx = x.artan x - \log\sqrt{1+x^2}$.

ГЛАВА XIV.

Нѣкоторыя свойства раціональныхъ функцій. Интегрированіе раціональныхъ функцій.

§ 150. **Интегрированіе цѣлой раціональной функціи.** Интегрированіе цѣлой раціональной функціи (§ 22) основано на формулахъ (105), (106) и (93).

Пусть имѣемъ цѣлую раціональную функцію перемѣннаго x:

$$f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n,$$

гдѣ n есть цѣлое положительное число, а p суть числа, не зависящія отъ x. Интегралъ этой функціи выражается такъ:

$$\int f(x)dx = \frac{p_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{p_1}{n}x^n + \ldots + \frac{p_{n-1}}{2}x^2 + p_nx + p_{n+1},$$

гдѣ p_{n+1} есть произвольное постоянное интегрированія.

§ 151. Нѣкоторыя свойства цѣлыхъ раціональныхъ функцій. Интегрированіе алгебраической раціональной дроби, т.-е. дроби, которой числитель и знаменатель суть цѣлые раціональные многочлены, основано на возможности разложенія этой дроби на т. н. *элементарныя* дроби. Разложеніе же алгебраической дроби на элементарныя зависитъ отъ нѣкоторыхъ свойствъ цѣлой раціональной функціи. Поэтому остановимся прежде всего на разсмотрѣніи нужныхъ для нашей цѣли свойствъ цѣлой раціональной функціи.

Въ приведенныхъ ниже теоремахъ подъ $f(x)$ будемъ разумѣть цѣлую раціональную функцію степени n, т.-е. будемъ полагать, что

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n,$$

гдѣ n есть цѣлое положительное число, а p суть коэффиціенты, не зависящіе отъ x. Въ тѣхъ случаяхъ, когда нужно указать степень функціи $f(x)$ будемъ обозначать эту функцію черезъ $f_n(x)$.

Теорема I. *Существуетъ число a, при которомъ $f(x)$ обращается въ нуль, т.-е. такое, что $f(a)=0$.*

Эта теорема есть основная теорема алгебры. Доказательство ея выходитъ изъ рамокъ настоящаго курса. Его можно найти въ каждомъ курсѣ высшей алгебры.

Число a, при которомъ $f(x)$ обращается въ нуль, называется *корнемъ* или *нулемъ* функціи $f(x)$. Корень функціи $f(x)$ можетъ быть числомъ *вещественнымъ* и числомъ *комплекснымъ*.

Теорема II (Bézout). *Остатокъ отъ дѣленія цѣлой раціональной функціи $f(x)$ на разность $x-a$ равенъ $f(a)$.*

Док. Если $Q(x)$ и R суть соотвѣтственно частное и остатокъ при дѣленіи $f(x)$ на $x-a$, гдѣ R есть постоянное относительно x число, то по свойству дѣленія имѣемъ тождество:

$$f(x)\equiv(x-a)\,Q(x)+R.$$

Положивъ въ этомъ тождествѣ $x=a$, получимъ $R=f(a)$, что и треб. доказать.

Слѣдствіе. Если a есть корень функціи $f_n(x)$, то $R=f(a)=0$ и

$$f_n(x)=(x-a)\,f_{n-1}(x).$$

Теорема III. *Цѣлая раціональная функція $f_n(x)$ имѣетъ n корней.*

Док. По теоремѣ I функція $f_n(x)$ имѣетъ корень; обозначивъ его черезъ a_1, по слѣдствію теоремы II найдемъ:

$$f_n(x)=(x-a_1)\,f_{n-1}(x).$$

Прилагая то же разсужденіе къ функціи $f_{n-1}(x)$, получимъ:

$$f_{n-1}(x)=(x-a_2)\ f_{n-2}(x),$$

гдѣ a_2 есть корень функціи $f_{n-1}(x)$.

Точно также найдемъ, что

$$\begin{aligned} f_{n-2}(x)&=(x-a_3)f_{n-3}(x),\\ f_{n-3}(x)&=(x-a_4)f_{n-4}(x),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ f_2(x)&=(x-a_{n-1})f_1(x),\\ f_1(x)&=(x-a_n)f_o(x), \end{aligned}$$

гдѣ $a_3,\ a_4,\ldots,\ a_n$ суть корни соотвѣтственно функцій:

$$f_{n-2}(x),\ f_{n-3}(x),\ldots,\ f_1(x).$$

Перемноживъ написанныя выше равенства и сокративъ результатъ, получимъ

$$f_n(x)=(x-a_1)\ (x-a_2)\cdot\cdot(x-a_{n-1})\ (x-a_n)f_o(x),$$

гдѣ $f_o(x)$ есть функція *нулевой* степени относительно x, т.-е. *постоянное* относительно x число.

Послѣднее равенство показываетъ, что $f_n(x)$ обращается въ нуль при $x=a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$, т.-е. *имѣетъ n корней.* Что же касается числа $f_o(x)$, то легко убѣдиться, что оно равно p_o. Дѣйствительно, послѣдняя формула показываетъ, что $f_n(x)$ дѣлится безъ остатка на произведеніе $(x-a_1)\ (x-a_2)\ldots(x-a_n)$, представляющее въ раскрытомъ видѣ многочленъ $n^{\text{ой}}$ степени, старшій членъ котораго есть x^n, и что частное отъ этого дѣленія равно $f_o(x)$. Съ другой стороны, частное двухъ многочленовъ одной и той же степени равно частному отъ дѣленія ихъ старшихъ членовъ, т.-е. въ разсматриваемомъ случаѣ равно $p_ox^n : x^n = p_o$. Слѣд., $f_o(x)=p_o$ и

$$f_n(x)=p_o(x-a_1)\ (x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Эта формула даетъ разложеніе на линейные множители многочлена $f_n(x)$ и показываетъ, что разложеніе многочлена на линейные множители и нахожденіе его корней или рѣшеніе уравненія $f_n(x)=0$ представляютъ одну и ту же задачу.

Если всѣ a различны между собою, то каждое изъ нихъ называется *простымъ корнемъ функціи* $f_n(x)$; если же $a_1=a_2=\ldots=$ $=a_\alpha=a(\alpha\leq n)$, то a называется α-*кратнымъ* корнемъ $f_n(x)$, а число α—степенью кратности корня a.

Изъ этого слѣдуетъ, что если $a, b, \ldots, l$ суть корни функціи $f_n(x)$ соотвѣтственно степеней кратности $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, то

$$f_n(x) = p_0(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda,$$

при чемъ $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n$.

Слѣдствіе 1. *Если функція $f_n(x)$ обращается въ нуль при большемъ, чѣмъ n, числѣ значеній перемѣннаго x, то она тождественно равна нулю, т.-е. всѣ ея коэффиціенты суть нули.*

Док. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть корни $f_n(x)$. По предыдущему

$$f_n(x) = p_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Если a_{n+1} есть число, отличное отъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $f(a_{n+1}) = 0$, то изъ этого равенства слѣдуетъ, что $p_0 = 0$. Слѣд.,

$$f_n(x) = p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n =$$
$$= p_1(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}).$$

По предположенію при $x = a_{n+1}$ функція $f_n(x)$ обращается въ нуль; слѣд., $p_1 = 0$ и $f_n(x) = p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n$. Повторяя указанное разсужденіе, мы придемъ къ заключенію, что каждый изъ коэффиціентовъ p есть нуль.

Слѣдствіе 2. *Если двѣ цѣлыхъ раціональныхъ функціи $f(x)$ и $F(x)$ тождественно равны, т.-е. имѣютъ равныя значенія при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго, то коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ перемѣннаго x въ этихъ функціяхъ равны.*

Док. Разность $f(x) - F(x)$ представляетъ цѣлый многочленъ, который равенъ нулю при *всѣхъ* значеніяхъ x; по слѣдствію 1 всѣ коэффиціенты его равны нулю. Отсюда вытекаетъ изложенное въ слѣдствіи 2 предложеніе.

Предыдущія теоремы не налагали никакихъ ограниченій на *коэффиціенты* разсматриваемой функціи. Коэффиціенты ея могли быть числами *вещественными* и числами *комплексными*. Слѣдующая теорема относится только къ тѣмъ цѣлымъ раціональнымъ функціямъ, всѣ коэффиціенты которыхъ суть числа *вещественныя*.

Теорема IV. *Если цѣлая раціональная функція $f(x)$ съ вещественными коэффиціентами имѣетъ комплексный корень $x = \xi + i\eta$, гдѣ ξ и η вещественныя числа, а $i = \sqrt{-1}$, то она имѣетъ также корень $x = \xi - i\eta$, сопряженный съ первымъ.*

Док. Изъ ученія о комплексныхъ числахъ извѣстно, что результаты всѣхъ дѣйствій надъ ними выражаются комплексными числами. Поэтому результатъ подстановки числа $\xi + i\eta$ вмѣсто x въ функцію $f(x)$ есть число вида $P + iQ$, гдѣ P и Q суть вещественныя числа. Для того, чтобы $f(\xi + i\eta) = P + iQ = 0$, необходимо и достаточно, чтобы каждое изъ чиселъ P и Q было нулемъ.

Такъ какъ сопряженныя числа $\xi + i\eta$ и $\xi - i\eta$ отличаются только знакомъ при i, а коэффиціенты функціи $f(x)$, по предположенію, вещественны, т.-е. не содержатъ числа i, то результатъ подстановки числа $\xi - i\eta$ вмѣсто x въ функцію $f(x)$ выразится числомъ $P - iQ$, которое обращается въ нуль, если $P = 0$ и $Q = 0$. Слѣд., если $f(\xi + i\eta) = 0$, то и $f(\xi - i\eta) = 0$, что и требовалось доказать.

Слѣдствіе 1. *Если число $\xi + i\eta$ есть к-кратный корень функціи $f(x)$, то и число $\xi - i\eta$ есть ея к-кратный корень.*

Слѣдствіе 2. *Паръ сопряженныхъ комплексныхъ корней въ разложеніи функціи $f(x)$ на множители соотвѣтствуетъ множитель вида $x^2 + px + q$, при чемъ $q - p^2/4 > 0$.*

Дѣйствительно, корню $\xi + i\eta$ соотвѣтствуетъ въ разложеніи функціи $f(x)$ множитель: $x - \xi - i\eta$, а корню $\xi - i\eta$ — множитель: $x - \xi + i\eta$. Произведеніе ихъ равно $(x - \xi)^2 + \eta^2$ или $x^2 - 2\xi x + (\xi^2 + \eta^2)$, т.-е. представляетъ выраженіе вида: $x^2 + px + q$, гдѣ $p = -2\xi$, $q = \xi^2 + \eta^2$ и $q - p^2/4 = \eta^2 > 0$.

Слѣдствіе 3. *к-кратной паръ сопряженныхъ комплексныхъ корней въ разложеніи функціи $f(x)$ соотвѣтствуетъ множитель $(x^2 + px + q)^k$.*

Изъ приведенныхъ выше теоремъ вытекаетъ слѣдующее заключеніе: *цѣлая раціональная функція $f(x)$ съ вещественными коэффиціентами разлагается на множители вида: $(x - a)^\alpha$ и $(x^2 + px + q)^k$, гдѣ a, p и q суть вещественныя числа, а α и k—цѣлыя и положительныя числа.*

§ 152. **Разложеніе раціональной дроби на элементарныя.** Раціональная алгебраическая дробь имѣетъ видъ $F(x)/f(x)$, гдѣ F и f обозначаютъ цѣлые раціональные многочлены относительно перемѣннаго x. Мы будемъ предполагать, что эти многочлены не имѣютъ общихъ множителей, т.-е. что данная дробь *несократима.*

Если степень числителя меньше степени знаменателя, то дробь называется *правильной,* а въ противномъ случаѣ *неправильной.*

Такъ какъ *неправильную* дробь посредствомъ дѣленія числителя на знаменатель можно представить въ видѣ суммы *цѣлой* раціональной функціи и *правильной* дроби, то можно ограничиться разсмотрѣніемъ только *правильной* дроби. Кромѣ того мы будемъ заниматься только такими дробями, которыхъ числители и знаменатели суть многочлены съ *вещественными* коэффиціентами.

Пусть $F(x)/f(x)$ есть несократимая правильная дробь, и пусть коэффиціенты функцій $F(x)$ и $f(x)$ суть вещественныя числа.

Положимъ, что a есть α-кратный корень функціи $f(x)$, т.-е. что

$$f(x) = (x - a)^\alpha f_1(x) \text{ и } f_1(a) \neq 0\ ^*).$$

---

*) Въ настоящемъ § значки при f и F *не* указываютъ на степень функціи, какъ это было въ § 151.

Въ такомъ случаѣ данную дробь можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)}, \quad \ldots \ldots (\lambda)$$

гдѣ A есть постоянное число.

Чтобы доказать это, возьмемъ тождество:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x)}{f(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha}.$$

Соединяя во второй части два послѣдніе члена, находимъ:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x) - Af_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} \quad \ldots \ldots (\mu)$$

Такъ какъ въ тождествѣ (λ) число A совершенно произвольно, то можно выбрать его такъ, чтобы вторая дробь второй части тождества (μ) сократилась на $x-a$. Для этого достаточно (§ 151, теор. II), чтобы

$$F(a) - Af_1(a) = 0 \text{ или } A = F(a) / f_1(a).$$

Это равенство даетъ для A опредѣленное значеніе, неравное нулю, такъ какъ, по предположенію, $F(a)$ и $f_1(a)$ отличны отъ нуля. При этомъ значеніи A имѣемъ:

$$F(x) - Af_1(x) = (x-a)\ F_1(x), \quad \ldots \ldots (\nu)$$

гдѣ $F_1(x)$ есть цѣлый многочленъ. Съ помощію этого равенства тождество (μ) преобразуется въ тождество (λ). Такимъ образомъ доказана возможность выдѣленія изъ данной дроби $F(x)/f(x)$ дроби $A/(x-a)^\alpha$. Что касается многочлена $F_1(x)$, то изъ тождества (λ) видно, что степень его ниже степени $(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)$, а изъ тождества (ν), что онъ не имѣетъ общихъ дѣлителей съ многочленомъ $f_1(x)$. Изъ этого слѣдуетъ, что дробь

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)}$$

есть дробь правильная и либо несократимая, либо сократимая только на нѣкоторую степень разности $x-a$.

Повторяя относительно ея разсужденія, приложенныя къ первоначальной дроби, находимъ тождество:

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}f_1(x)}.$$

гдѣ A_1 есть постоянное число, которое можетъ быть и нулемъ, а $F_2(x)$ есть цѣлый многочленъ, не имѣющій общихъ дѣлителей съ многочленомъ $f_1(x)$.

Легко видѣть, что α-кратное повтореніе указаннаго процесса приведетъ насъ къ тождеству

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)},$$

въ которомъ $A, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ суть постоянныя $(A\neq 0)$, а $F_\alpha(x)$ есть цѣлый многочленъ, степени низшей, чѣмъ многочленъ $f_1(x)$, и не имѣющій съ нимъ общихъ дѣлителей.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что если

$$f(x)=(x-a)^\alpha\,(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda,$$

то имѣетъ мѣсто тождество:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+$$
$$+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\frac{L}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}, \quad \ldots \quad (107)$$

въ которомъ $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots, L, L_1, \ldots$ суть постоянныя и $A, B, \ldots, L$ отличны отъ нуля.

Дробь вида $A\,/\,(x-a)^\alpha$ называется *элементарной*. Формула (107) указываетъ форму разложенія несократимой правильной дроби на элементарныя.

Для опредѣленія коэффиціентовъ $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$ разложенія (107) можно воспользоваться слѣдствіемъ 2 теоремы III § 151. Приведя вторую часть тождества (107) къ одному знаменателю, который равенъ

$$(x-a)^\alpha\,(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda=f(x),$$

и складывая числителей, находимъ въ числителѣ суммы всѣхъ элементарныхъ дробей многочленъ степени $(\alpha+\beta+\ldots+\lambda)-1=n-1$. Этотъ многочленъ *тождественно* равенъ многочлену $F(x)$. Сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ перемѣннаго въ этихъ многочленахъ, получимъ систему n уравненій первой степени относительно искомыхъ n коэффиціентовъ $A, A_1, \ldots B, B_1, \ldots$ разложенія (107). Рѣшеніе этой системы даетъ ихъ значенія.

Разложенiе (107) имѣетъ мѣсто какъ въ томъ случаѣ, когда всѣ корни знаменателя данной дроби суть вещественныя числа, такъ и въ томъ, когда знаменатель имѣетъ комплексные корни. Въ послѣднемъ случаѣ формула (107) представляетъ то неудобство, что во второй части ея появляются комплексныя числа. Покажемъ, что это неудобство можно устранить, воспользовавшись теоремой IV § 151.

По слѣдствiю 3 этой теоремы, k-кратной парѣ сопряженныхъ корней $\xi \mp i\eta$ функцiи $f(x)$ въ ея разложенiи на множители соотвѣтствуетъ множитель $(x^2+px+q)^k$, гдѣ

$$p=-2\xi,\ q=\xi^2+\eta^2,\ q-p^2/4>0.$$

Поэтому $f(x)=(x^2+px+q)^k f_1(x)$.

При помощи этого равенства данную дробь можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}+\frac{F(x)}{(x^2+px+q)^k f_1(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}=$$
$$=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}+\frac{F(x)-(Mx+N)f_1(x)}{(x^2+px+q)^k f_1(x)},$$

гдѣ M и N суть произвольныя, постоянныя числа.

Опредѣлимъ M и N такъ, чтобы вторая дробь второй части послѣдняго тождества сократилась на x^2+px+q. Для этого достаточно, чтобы числитель ея дѣлился на $x-(\xi+i\eta)$ и на $x-(\xi-i\eta)$ (см. § 151, теор. IV, слѣд. 2). Если онъ дѣлится на первую разность, то по теор. II § 151 должно имѣть мѣсто тождество:

$$F(\xi+i\eta)-[M(\xi+i\eta)+N]f_1(\xi+i\eta)=0;$$

отсюда находимъ

$$(M\xi+N)+iM\eta=\frac{F(\xi+i\eta)}{f_1(\xi+i\eta)}=P+iQ,$$
$$M\xi+N=P,\ M\eta=Q,$$

гдѣ P и Q суть вещественныя числа.

Эти уравненiя опредѣляютъ коэффицiенты M и N. Легко убѣдиться, что при найденныхъ такимъ образомъ значенiяхъ этихъ коэффицiентовъ многочленъ $F(x)-(Mx+N)f_1(x)$ дѣлится и на разность $x-(\xi-i\eta)$ и, слѣд., дѣлится на произведенiе

$$[x-(\xi+i\eta)]\ [x-(\xi-i\eta)]=x^2+px+q.$$

Поэтому данная дробь можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}+\frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}f_1(x)},$$

гдѣ $F_1(x)$ есть многочленъ степени не выше $n-3$, не имѣющій общихъ множителей съ $f_1(x)$.

Дробь вида

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

при условіи, что $q-p^2/4>0$, называется *элементарной*.

Изъ приведеннаго выше разсужденія слѣдуетъ, что въ разложеніи дроби $F(x)/f(x)$ на элементарныя k-кратной парѣ сопряженныхъ комплексныхъ корней соотвѣтствуетъ сумма:

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\ldots+\frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{x^2+px+q},$$

гдѣ M, N, M_1, $N_1,\ldots$, M_{k-1}, N_{k-1} суть вещественныя числа и притомъ по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ M и N отлично отъ нуля. Они опредѣляются тѣмъ же способомъ, какъ и коэффиціенты разложенія (107).

Примѣръ 1. *Разложить дробь* $(x+1)/x^2(x-1)$ *на элементарныя.*

По формулѣ (107) имѣемъ

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{A_1}{x}+\frac{B}{x-1}.$$

Отсюда находимъ:

$$A(x-1)+A_1x(x-1)+Bx^2=x+1.$$

Сравненіе коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ x въ правой и лѣвой частяхъ этого тождества даетъ систему уравненій:

$$A_1+B=0;\ A-A_1=1;\ A=-1.$$

Рѣшая эту систему, получимъ:

$$A=-1,\ A_1=-2,\ B=2.$$

Слѣд.,
$$\frac{x+1}{x^2(x-1)}=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\frac{2}{x-1}.$$

Примѣръ 2. *Разложить дробь* $1/(x-1)(x^2+1)^2$ *на элементарныя.*

Такъ какъ знаменатель имѣетъ одинъ вещественный корень $(x=1)$ и двукратную пару сопряженныхъ мнимыхъ корней $(x=\pm i)$, то разложеніе представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{(x^2+1)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}.$$

Приведя это тождество къ одному знаменателю и сравнивъ коэффиціенты числителей, получимъ для опредѣленія A, M, N, M_1 и N_1 систему:

$$A+M_1=0;\ N_1-M_1=0;\ 2A+M+M_1-N_1=0;$$
$$N-M-M_1+N_1=0;\ A-N-N_1=1.$$

Рѣшивъ ее, получимъ:

$$A=\frac{1}{4};\ M=N=-\frac{1}{2};\ M_1=N_1=-\frac{1}{4}.$$

Искомое разложеніе таково:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Упражненія. *Слѣдующія дроби разложить на элементарныя:*

1. $\frac{x}{x^2+7x+12}$; 2. $\frac{1}{x^3+1}$; 3. $\frac{1}{x^4+1}$.

§ 153. **Интегрированіе раціональныхъ дробей.** Изъ предыдущаго § слѣдуетъ, что интегрированіе правильной раціональной дроби приводится къ вычисленію интеграловъ слѣдующихъ типовъ:

$$\text{A)} \int\frac{dx}{x-a};\ \text{B)} \int\frac{dx}{(x-a)^\varkappa};\ \text{C)} \int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx;\ \text{D)} \int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx.$$

Разсмотримъ отдѣльно каждый изъ нихъ.

A) Такъ какъ $dx=d(x-a)$, то (форм. 94).

$$\int\frac{dx}{x-a}=\int\frac{d(x-a)}{x-a}=log\,(x-a).$$

B) Пользуясь тѣмъ же преобразованіемъ для интеграла второго типа, получимъ (форм. 93):

$$\int\frac{dx}{(x-a)^\alpha}=\int(x-a)^{-\alpha}d(x-a)=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}.$$

C) Интегралъ третьяго типа можно представить въ видѣ суммы двухъ интеграловъ слѣдующимъ образомъ:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{M\left(x+\frac{p}{2}\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx=$$
$$=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Найдемъ интегралы второй части этого тождества (см. § 148):

$$\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}=log(x^2+px+q);$$

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,arctan\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.$$

D) Вычисленіе интеграла 4-го типа основано на томъ, что его можно привести къ интегралу

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (D')$$

который въ свою очередь приводится къ интегралу того же типа, но съ показателемъ $k-1$ въ знаменателѣ.

Дѣйствительно,

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=$$
$$=\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Для вычисленія второго интеграла положимъ $x+p/2=z$ и $q-p^2/4=\mu^2$; получимъ:

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}=\int\frac{dz}{(z^2+\mu^2)^k}.$$

Преобразуемъ послѣдній интегралъ слѣдующимъ образомъ:

$$\int\frac{dz}{(z^2+\mu^2)^k}=\frac{1}{\mu^2}\int\frac{(z^2+\mu^2)-z^2}{(z^2+\mu^2)^k}dz=\frac{1}{\mu^2}\int\frac{dz}{(z^2+\mu^2)^{k-1}}-\frac{1}{\mu^2}\int\frac{z^2dz}{(z^2+\mu^2)^k}.$$

Прилагая ко второму интегралу второй части этого тождества формулу интегрированія по частямъ (§ 149), найдемъ:

$$\int\frac{z^2dz}{(z^2+\mu^2)^k}=\int z\cdot\frac{zdz}{(z^2+\mu^2)^k}=\frac{1}{2(1-k)}\cdot\frac{z}{(z^2+\mu^2)^{k-1}}-$$

$$-\frac{1}{2(1-k)}\int\frac{dz}{(z^2+\mu^2)^{k-1}}.$$

При помощи этого равенства изъ предыдущаго получимъ:

$$\int\frac{dz}{(z^2+\mu^2)^k}=\frac{1}{2(k-1)\mu^2}\cdot\frac{z}{(z^2+\mu^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{1}{\mu^2}\int\frac{dz}{(z^2+\mu^2)^{k-1}}.$$

Эта формула показываетъ, что интегралъ типа D' можно привести къ интегралу того же типа, но съ меньшимъ на единицу показателемъ въ знаменателѣ. Послѣдовательное приложеніе этой формулы $k-1$ разъ приводитъ къ найденному уже интегралу (см. интегралъ типа C).

Указанныя въ настоящемъ § формулы исчерпываютъ вопросъ объ интегрированіи раціональныхъ правильныхъ дробей. Что же касается неправильной дроби, то она можетъ быть представлена въ видѣ суммы цѣлаго многочлена и правильной дроби. Поэтому интегрированіе всякой раціональной дроби совершается пріемами, указанными въ § 150 и настоящемъ.

Примѣръ 1. *Найти* $\int\frac{x+1}{x^2(x-1)}dx.$

Разложеніе подъинтегральной дроби на элементарныя указано въ § 152.

Пользуясь имъ, находимъ:

$$\int\frac{x+1}{x^2(x-1)}dx=-\int\frac{dx}{x^2}-2\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=\frac{1}{x}-2\log x+2\log(x-1)+C.$$

Примѣръ 2. *Найти* $\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)^2}.$

Разложеніе подъинтегральной дроби на элементарныя (см. § 152, примѣръ 2) приводитъ къ равенству:

$$\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx-\frac{1}{4}\int\frac{x+1}{x^2+1}\,dx.$$

Найдемъ отдѣльно каждый изъ интеграловъ второй части. Первый интегралъ берется по формулѣ (94):

$$\int\frac{dx}{x-1}=log(x-1).$$

Второй интегралъ вычисляется слѣдующимъ образомъ:

$$\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2};$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=arctan x-\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2};$$

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=\int x\cdot\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\,arctan x,$$

слѣд.,

$$\int\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\,arctan x.$$

Для третьяго интеграла находимъ:

$$\int\frac{x+1}{x^2+1}\,dx=\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\,log(x^2+1)+arctan x.$$

Умноживъ первый интегралъ на $^1/_4$, второй на $-^1/_2$ и третій на $-^1/_4$ и сложивъ, получимъ данный интегралъ:

$$\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{1}{8}\,log\,\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\frac{1}{2}\,arctan x-\frac{x-1}{4(x^2+1)}+C.$$

Упражненія.

1. $\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}$.

2. $\int\frac{2x+3}{x^2-5x+6}dx=\log\frac{(x-3)^9}{(x-2)^7}$.

3. $\int\frac{xdx}{(x+2)(x+3)^2}=-\frac{3}{x+3}+2\log\frac{x+3}{x+2}$.

4. $\int\frac{2xdx}{(x^2+1)(x^2+3)}=\log\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+3}}$.

5. $\int\frac{(x^2-x+1)dx}{x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{2}\left\{\log\frac{(1+x)^3}{\sqrt{1+x^2}}-arctan x\right\}$.

6. $\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\log\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

7. $\int\frac{dx}{1-x^4}=\log\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{1}{2}arctan x$.

8. $\int\frac{x^2dx}{x^4+x^2-2}=\frac{1}{6}\log\frac{x-1}{x+1}+\frac{\sqrt{2}}{3}arctan\frac{x}{\sqrt{2}}$.

9. $\int\frac{x^4-2x^3+x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx=\frac{x^3-x^2-2}{2(x-1)}+\log\frac{x}{x-1}$.

10. $\int\frac{x^m dx}{(x-a_1)(x-a_2)..(x-a_n)}=\frac{a_1^m\log(x-a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)..(a_1-a_n)}+$

$+\frac{a_2^m\log(x-a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)..(a_2-a_n)}+..+\frac{a_n^m\log(x-a_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)..(a_n-a_{n-1})}$,

гдѣ $m<n$.

11. $\int\frac{dx}{x(1+x^3)}=\frac{1}{3}\log\frac{x^3}{x^3+1}$. (*Подстановка:* $x^{-1}=z$).

12. $\int\frac{dx}{x(a+bx^4)}=\frac{1}{4a}\log\frac{x^4}{a+bx^4}$.

ГЛАВА XV.

Простѣйшіе случаи интегрированія ирраціональныхъ и трансцендентныхъ функцій.

§ 154. **Интегрированіе ирраціональныхъ алгебраическихъ функцій.** Задача интегрированія ирраціональныхъ алгебраическихъ функцій приводитъ, вообще, къ новымъ трансцендентнымъ функціямъ. Но въ нѣкоторыхъ случаяхъ съ помощію надлежащимъ образомъ выбранной подстановки можно преобразовать ирраціональный дифференціалъ въ раціональный и такимъ образомъ привести вопросъ къ интегрированію раціональной алгебраической функціи, т.-е. къ задачѣ, рѣшенной въ предыдущей главѣ.

Разсмотримъ три такихъ случая:

$$(A)\ \int f(x,\sqrt[n]{ax+b})dx;\quad (B)\ \int f\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right)dx;$$

$$(C)\ \int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

гдѣ f обозначаетъ *раціональную* функцію аргументовъ, въ нее входящихъ, а n есть цѣлое положительное число.

§ 155. **Интегралъ типа** (A) приводится къ интегралу раціональной функціи подстановкой:

$$ax+b=z^n.$$

Дѣйствительно, изъ этого уравненія находимъ:

$$x=\frac{z^n-b}{a},\ \sqrt[n]{ax+b}=z;\quad dx=\frac{nz^{n-1}}{a}dz.$$

Интегралъ (A) преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$\int f(x,\sqrt[n]{ax+b})dx=\int f\left(\frac{z^n-b}{a},\ z\right)\frac{nz^{n-1}}{a}\,dz=\int F(z)dz,$$

гдѣ $F(z)$ есть раціональная функція перемѣннаго z.

§ 156. **Интегралъ типа** (B) можно привести къ интегралу раціональной функціи посредствомъ подстановки:

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}=z^n.$$

Изъ этого уравненія имѣемъ:

$$x = \frac{b'z^n - b}{a - a'z^n}; \sqrt[n]{\frac{ax + b}{a'x + b'}} = z; \ dx = \frac{(ab' - a'b)nz^{n-1}dz}{(a - a'z^n)^2}.$$

Поэтому

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{a'x + b'}}\right)dx = \int f\left(\frac{b'z^n - b}{a - a'z^n}, z\right) \cdot \frac{(ab' - a'b)nz^{n-1}dz}{(a - a'z^n)^2} = \int F(z)dz,$$

гдѣ $F(z)$ есть раціональная функція перемѣннаго z.

Упражненіе. *Показать, что интегралы*

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{a'x + b'}}, \sqrt[m]{\frac{ax + b}{a'x + b'}}\right)dx,$$

$$\int f\left[x, \left(\frac{ax + b}{a'x + b'}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax + b}{a'x + b'}\right)^{\frac{p'}{q'}}\right]dx,$$

гдѣ f есть знакъ раціональной функціи, а m, n, p, q, p', q' — натуральныя числа, приводятся къ интегралу (B).

Примѣръ 1. *Найти интегралъ* $\int \frac{xdx}{\sqrt{x - 1}}$.

Полагая $\sqrt{x - 1} = z$, находимъ $x = z^2 + 1$, $dx = 2zdz$. Поэтому

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x - 1}} = 2\int (z^2 + 1)dz = \frac{2}{3}z^3 + 2z + C = \frac{2}{3}(x + 2)\sqrt{x - 1} + C.$$

Примѣръ 2. *Найти интегралъ* $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}dx$.

Полагая $\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = z$, находимъ:

$$x = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}, \ dx = \frac{4zdz}{(z + 1)^2}.$$

Подставляя найденныя значенія x и dx въ данный интегралъ, получимъ:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1 + x}{1 - 1}}dx = \int \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \cdot \frac{4z^2dz}{(z^2 + 1)^2} = \int \frac{4z^2dz}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)} =$$

$$= 2\int \frac{(z^2 + 1) + (z^2 - 1)}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)}dz = 2\int \frac{dz}{z^2 - 1} + 2\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int \frac{dz}{z - 1} -$$

$$-\int\frac{dz}{z+1}+2\int\frac{dz}{z^2+1}=\log\frac{z-1}{z+1}+2\operatorname{arctan}z+C=$$

$$=\log\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+2\operatorname{arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

§ 157. **Интегралъ типа** (C) приводится къ интегралу раціональной функціи посредствомъ одной изъ слѣдующихъ подстановокъ:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=z-\sqrt{a}\,x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}=\sqrt{a}(x-x_1)z \quad \ldots \quad (\beta)$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}-xz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Разсмотримъ каждую изъ этихъ подстановокъ отдѣльно.

1) *Подстановка* (α) приводитъ черезъ возведеніе въ квадратъ обѣихъ частей ея къ уравненію *первой* степени относительно x:

$$bx+c=z^2-2\sqrt{a}xz.$$

Опредѣляя x, dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получимъ:

$$x=\frac{z^2-c}{b+2\sqrt{a}z};\quad dx=\frac{2(\sqrt{a}z^2+bz+\sqrt{a}c)}{(b+2\sqrt{a}z)^2}dz,\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}z^2+bz+\sqrt{a}\,c}{b+2\sqrt{a}z}.$$

Интегралъ (C) преобразуется въ слѣдующій:

$$\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=$$

$$=\int f\left(\frac{z^2-c}{b+2\sqrt{a}z},\frac{\sqrt{a}z^2+bz+\sqrt{a}c}{b+2\sqrt{a}z}\right)\frac{2(\sqrt{a}z^2+bz+\sqrt{a}c)dz}{(b+2\sqrt{a}z)^2}=\int F(z)dz,$$

гдѣ $F(z)$ есть раціональная функція z.

Подстановку (α) удобно примѣнять въ томъ случаѣ, когда $a>0$.

2) *Подстановка* (β) по возведеніи въ квадратъ даетъ уравненіе *первой* степени относительно x:

$$x-x_2=(x-x_1)z^2.$$

Вычисляя x, dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получаемъ:

$$x=\frac{x_1z^2-x_2}{z^2-1};\quad dx=\frac{2(x_2-x_1)zdz}{(z^2-1)^2};\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}(x_1-x_2)z}{z^2-1}.$$

Подстановка этихъ значенiй x, dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ въ интегралъ (C) приводитъ къ интегралу *рацiональной* функцiи z.

Подстановку (β) удобно примѣнять въ случаѣ *вещественныхъ* корней трехчлена ax^2+bx+c.

3) *Подстановка* (γ) приводитъ, какъ и подстановки (α) и (β), къ уравненiю *первой* степени относительно x:

$$ax+b=xz^2-2\sqrt{c}z;$$

поэтому x, dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ выражаются *рацiонально* черезъ z; слѣд., интегралъ (C) приводится разсматриваемой подстановкой къ интегралу рацiональной функцiи z.

Три подстановки (α), (β) и (γ) извѣстны подъ названiемъ *„подстановокъ Эйлера"*. Существованiе ихъ доказываетъ, что интегралъ вида (C) *всегда* выражается алгебраическими и элементарными трансцендентными функцiями. Но самое вычисленiе интеграла вида (C) часто дѣлается гораздо проще при помощи другихъ прiемовъ.

Примѣръ 1. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

Примѣняя подстановку (α), положимъ

$$\sqrt{x^2+px+q}=z-x,$$

откуда находимъ

$$x=\frac{z^2-q}{p+2z};\ dx=\frac{2(z^2+pz+q)dz}{(p+2z)^2};\ \sqrt{x^2+px+q}=\frac{z^2+pz+q}{p+2z}.$$

Слѣд.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\int\frac{2dz}{p+2z}=log\left(\frac{p}{2}+z\right)+C=$$

$$=log\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right)+C.$$

Примѣръ 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$ можно вычислить, не прибѣгая къ подстановкамъ Эйлера, слѣдующимъ образомъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=$$

$$= \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = arcsin\,\frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + C.$$

Примѣръ 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ при помощи подстановки $xz = 1$ приводятся къ интегралу $-\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$, т.-е. къ $arccos z$ (форм. 100). Слѣд.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = arccos\,\frac{1}{x} + C = arcsec x + C.$$

§ 158. **Интегрированіе трансцендентныхъ функцій.** Интегрированіе функцій, зависящихъ отъ элементарныхъ трансцендентныхъ, приводитъ, вообще, къ новымъ *(высшимъ)* трансцендентнымъ функціямъ.

Разсмотримъ нѣкоторые изъ простѣйшихъ случаевъ, въ которыхъ интегралы указанныхъ функцій выражаются алгебраическими и элементарными трансцендентными функціями.

А) $\int f(x)\varphi(x)dx$, гдѣ $f(x)$ есть *цѣлая раціональная* функція x, а $\varphi(x)$ — одна изъ *трансцендентныхъ*, производныя которыхъ суть *алгебраическія* функціи, т.-е. одна изъ функцій (§§ 118—121, 126):

$$arcsin x, \quad arccos x, \quad arctan x, \quad arccot x, \quad log x.$$

Такъ какъ $f(x)$ есть, по условію, цѣлая раціональная функція, то $\int f(x)dx$ мы можемъ считать извѣстнымъ (§ 150). Обозначивъ его черезъ $F(x)$ и примѣняя формулу интегрированія по частямъ (§ 149), находимъ:

$$\int f(x)\varphi(x)dx = F(x)\varphi(x) - \int F(x)\varphi'(x)dx.$$

Производная $\varphi'(x)$ функціи $\varphi(x)$ имѣетъ одно изъ слѣдующихъ значеній:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ \pm\frac{1}{1 + x^2}, \ \frac{1}{x}.$$

Поэтому $F(x)\cdot\varphi'(x)$ есть либо раціональная функція аргументовъ x и $\sqrt{1 - x^2}$, либо раціональная функція x. Въ томъ и другомъ случаѣ интегралъ $\int F(x)\varphi'(x)dx$ берется въ конечномъ видѣ (§ 157 и глава XIV).

Примѣръ 1. $\int arcsin x dx = x \cdot arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot arcsin x +$
$$+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Примѣръ 2. $\int x^2 log x dx = \frac{x^3}{3} log x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} log x - \frac{x^3}{9} + C.$

B) $\int f(sin x,\ cos x) dx$, гдѣ f обозначаетъ раціональную функцію, приводится къ интегралу раціональной функціи посредствомъ подстановки: $tan\frac{x}{2} = z$. Дѣйствительно, вычисляя $sin x$, $cos x$ и dx черезъ z, находимъ:

$$sin x = 2 sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} = 2 cos^2\frac{x}{2}\, tan\frac{x}{2} = \frac{2z}{1+z^2};$$

$$cos x = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = cos^2\frac{x}{2}\left(1 - tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-z^2}{1+z^2};$$

$$x = 2 arctan z;\ dx = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Поэтому

$$\int f(sin x, cos x) dx = \int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \cdot \frac{2dz}{1+z^2} = \int F(z) dz,$$

гдѣ $F(z)$ есть раціональная функція z.

Примѣръ. $\int\frac{dx}{sin x} = \int\frac{dz}{z} = log z$, гдѣ $z = tan\frac{x}{2}$, т.-е.

$$\int\frac{dx}{sin x} = log\, tan\frac{x}{2} + C.$$

C) Къ интеграламъ вида **B**) принадлежатъ интегралы:

$$\int sin^n x dx,\ \int cos^n x dx,\ \int sin^n x . cos^m x dx,$$

гдѣ n и m суть цѣлыя числа. Для вычисленія интеграловъ этихъ типовъ примѣняется способъ интегрированія по частямъ (§ 149), приводящій къ такъ называемымъ *„формуламъ приведенія“* или *редукціоннымъ* формуламъ.

Разсмотримъ для примѣра первый изъ указанныхъ интеграловъ. Замѣтивъ, что $sin^n x dx = sin^{n-1} x . sin x dx = - sin^{n-1} x . d cos x$, по формулѣ интегрированія по частямъ, находимъ:

$$\int sin^n x dx = - sin^{n-1} x . cos x + (n-1) \int sin^{n-2} x . cos^2 x dx;$$

такъ какъ $cos^2x = 1 - sin^2x$, то

$$\int sin^n x dx = -sin^{n-1}x \, . \, cosx + (n-1)\int sin^{n-2}x dx - (n-1)\int sin^n x dx;$$

отсюда получаемъ:

$$\int sin^n x dx = -\frac{sin^{n-1}x \, . \, cosx}{n} + \frac{n-1}{n}\int sin^{n-2}x dx.$$

Эта формула называется *„формулой приведенія“* и позволяетъ понизить показатель n степени синуса на 2, что ведетъ къ упрощенію интеграла въ случаѣ n цѣлаго и *положительнаго*. Если n есть *четное* положительное число, то послѣдовательное приложеніе этой формулы приведетъ къ интегралу $\int dx = x$, а если n есть *нечетное* число, то къ интегралу $\int sinx dx = -cosx$.

Въ случаѣ, когда n есть цѣлое отрицательное число, указанная формула приводитъ данный интегралъ къ болѣе сложному. Но небольшое преобразованіе ея даетъ удобную для этого случая формулу.

Дѣйствительно, замѣнивъ въ ней $n-2$ черезъ $-n$ и опредѣливъ интегралъ второй части, получимъ:

$$\int \frac{dx}{sin^n x} = -\frac{cosx}{(n-1)sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{sin^{n-2}x},$$

гдѣ n обозначаетъ цѣлое положительное число. Эта формула показываетъ, что интегралъ $\int \frac{dx}{sin^n x}$ можно привести или къ $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -cotx$ (n — четное), или къ $\int \frac{dx}{sinx} = logtan\frac{x}{2}$ (n — нечетное).

D) Пріемъ составленія редукціонныхъ формулъ примѣняется при вычисленіи слѣдующихъ интеграловъ:

$$\int x^n e^x dx, \quad \int x^n sinx dx, \quad \int x^n cosx dx,$$

гдѣ n есть цѣлое число.

Для перваго изъ этихъ интеграловъ имѣемъ (§ 149):

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx.$$

Если n есть цѣлое *положительное* число, то посредствомъ n-кратнаго приложенія этой формулы данный интегралъ приводится къ $\int e^x dx = e^x$.

Если n есть цѣлое *отрицательное* число, то, выразивъ интегралъ второй части черезъ интегралъ первой и замѣнивъ n черезъ $-n+1$, получимъ

$$\int\frac{e^x}{x^n}dx=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{e^x}{x^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{e^x}{x^{n-1}}dx.$$

Изъ этой формулы видно, что $\int\frac{e^x dx}{x^n}$, гдѣ n есть цѣлое положительное число, приводится къ интегралу $\int\frac{e^x dx}{x}$, который черезъ подстановку $e^x=z$ преобразуется въ $\int\frac{dz}{log z}$, называемый *интегральнымъ логариѳмомъ* и представляющій новую трансцендентную функцію.

Тѣмъ же пріемомъ легко получить формулы приведенія двухъ остальныхъ интеграловъ:

$$\int x^n sinx dx=-x^n cosx+n\int x^{n-1}cosx dx,$$
$$\int x^n cosx dx=x^n sinx-n\int x^{n-1}sinx dx.$$

Эти формулы показываютъ, что при n цѣломъ и положительномъ интегралы $\int x^n sinx dx$ и $\int x^n cosx dx$ приводятся къ интеграламъ $\int sinx dx=-cosx$ и $\int cosx dx=sinx$.

Аналогичное указанному выше преобразованіе полученныхъ формулъ даетъ формулы приведенія для случая, когда показатель перемѣннаго есть цѣлое отрицательное число:

$$\int\frac{sinx}{x^n}dx=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{sinx}{x^{n-1}}+\frac{1}{n-1}\int\frac{cosx}{x^{n-1}}dx,$$
$$\int\frac{cosx}{x^n}dx=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{cosx}{x^{n-1}}-\frac{1}{n-1}\int\frac{sinx}{x^{n-1}}dx.$$

Послѣдовательное примѣненіе этихъ формулъ приводитъ интегралы $\int\frac{sinx}{x^n}dx$ и $\int\frac{cosx}{x^n}dx$ къ интеграламъ $\int\frac{sinx}{x}dx$ и $\int\frac{cosx}{x}dx$, которые представляютъ новыя трансцендентныя функціи и называются соотвѣтственно *интегральными синусомъ и косинусомъ*.

E) Для вычисленія интеграла $\int f(e^x)dx$, гдѣ f есть раціональная функція, употребляется подстановка: $e^x=z$, преобразующая

данный интегралъ въ $\int f(z)\cdot\frac{dz}{z}$, т.-е. въ интегралъ раціональной функціи.

Интегралъ $\int f(log x)dx$, гдѣ f есть раціональная функція, подстановкой: $log x = z$ приводится къ интегралу $\int f(z)e^z dz$, который распадается на интегралы перваго типа группы **D**.

Упражненія.

1. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-z}{\sqrt{2}+z}$, *гдѣ* $z=\sqrt{1-x}$.

2. $\int\frac{\sqrt{x}}{x-1}dx=2\sqrt{x}+\log\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\log(x+\sqrt{x^2+1})$.

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\arcsin(x-1)$.

5. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

6. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a.\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}$.

7. $\int\arccos x dx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

8. $\int\operatorname{arccot} x dx=x\operatorname{arccot} x+\log\sqrt{1+x^2}$.

9. $\int x\arctan x dx=\frac{1}{2}[(x^2+1)\arctan x-x]$.

10. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx=\log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{\arcsin x}{x}$.

11. $\int\frac{\log x dx}{(a+bx)^2}=\frac{1}{a}\left\{\frac{x\log x}{a+bx}-\frac{\log(a+bx)}{b}\right\}$.

12. $\int\frac{dx}{1+\cos x}=\operatorname{cosec} x-\cot x$.

13. $\int\sin^3 x dx=-\frac{1}{3}(2+\sin^2 x)\cos x$.

14. $\int \frac{dx}{sin^4x} = -cotx - \frac{1}{3}cot^3x.$

15. $\int \frac{dx}{cosx} = logtan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

16. $\int tan^2xdx = tanx - x.$

17. $\int tan^3xdx = \frac{1}{2}tan^2x + logcosx.$

18. $\int x^2sinxdx = 2xsinx - (x^2 - 2)cosx.$

19. $\int xsinxcosxdx = -\frac{x}{4}cos2x + \frac{1}{8}sin2x.$

20. $\int \frac{dx}{1+e^x} = x - log(1+e^x).$

21. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = arctane^x.$

22. $\int x^3e^{-x}dx = -(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}.$

23. $\int x^3(logx)^2dx = \frac{x^4}{4}\left\{(logx)^2 - \frac{1}{2}logx + \frac{1}{8}\right\}.$

ГЛАВА XVI.

Опредѣленные интегралы. Свойства опредѣленнаго интеграла. Распространеніе понятія интеграла. Приближенное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ. Формула трапецій. Формула Симпсона.

§ 159. **Свойства опредѣленнаго интеграла.** Въ § 144 указана слѣдующая формула, опредѣляющая интегралъ, какъ предѣлъ суммы:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim\left\{(x_1 - a)f(a) + (x_1 - x_2)f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1})\right\} \ldots (108$$

Разсмотримъ нѣкоторыя свойства опредѣленнаго интеграла, вытекающія изъ этой формулы.

1 свойство. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ . . . . (109)

2 свойство. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, ... (110)

гдѣ c есть произвольное число.

Эти два свойства являются непосредственными слѣдствіями опредѣленія (108).

3 свойство. Пусть $a < b$ и m и M соотвѣтственно наименьшее и наибольшее значеніе функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b), такъ что для всѣхъ значеній, лежащихъ въ этомъ интервалѣ, имѣютъ мѣсто неравенства:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Умножая эти неравенства на dx, которое по предположенію *положительно*, находимъ, что для всѣхъ значеній x въ интервалѣ (a, b)

$$mdx \leqslant f(x)dx \leqslant Mdx.$$

Отсюда на основаніи формулы (108) заключаемъ, что

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a), \quad . . . . . . (111)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$

гдѣ μ есть нѣкоторое среднее между m и M число. Это число μ есть одно изъ значеній функціи $f(x)$ въ интервалѣ (a, b), такъ какъ она, будучи непрерывной, принимаетъ *всѣ* значенія, заключенныя между наименьшимъ и наибольшимъ ея значеніями. Поэтому существуетъ между a и b такое число ξ, что $f(\xi) = \mu$. Принимая это во вниманіе, можно переписать послѣднее равенство въ слѣдующемъ видѣ:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi),$$

или, такъ какъ $\xi = a + \vartheta(b-a)$, гдѣ $0 < \vartheta < 1$,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f[a + \vartheta(b-a)], \quad 0 < \vartheta < 1. . . . . (112)$$

Упражненія. 1. *Указать геометрическое значеніе формулы (112).*

2. *Показать, что формула (112) есть новое выраженіе теоремы Lagrange'a о конечномъ приращеніи (§ 136).*

Свойство 4. *Если* $\varphi(x)$, $f(x)$ *и* $\psi(x)$ *суть непрерывныя въ интервалѣ* (a, b) *функціи, обладающія для всѣхъ значеній* x, *заключающихся въ этомъ интервалѣ, тѣмъ свойствомъ, что*

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x),$$

то при $a < b$ *имѣютъ мѣста неравенства:*

$$\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b \psi(x)dx.$$

Выводъ этого свойства аналогиченъ выводу свойства 3.

Свойство 5. *Пусть функціи* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *непрерывны въ интервалѣ* (a, b) *и пусть, кромѣ того,* $\varphi(x)$ *сохраняетъ въ этомъ интервалѣ одинъ и тотъ же знакъ. При выполненіи этихъ условій*

$$\int_a^b \varphi(x)\,.\,\psi(x)dx = \mu \int_a^b \varphi(x)dx, \quad \ldots\ldots \quad (113)$$

гдѣ μ *есть нѣкоторое среднее между наименьшимъ и наибольшимъ значеніями функціи* $\psi(x)$ *въ интервалѣ* (a, b).

Обозначивъ черезъ m и M соотвѣтственно наименьшее и наибольшее значенія функціи $\psi(x)$ въ интервалѣ (a, b), имѣемъ неравенства:

$$m \leqslant \psi(x) \leqslant M.$$

Изъ этихъ неравенствъ при $\varphi(x) > 0$ находимъ:

$$m\varphi(x) \leqslant \psi(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x).$$

Отсюда по свойству 4 слѣдуетъ, что

$$m\int_a^b \varphi(x)dx < \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx < M\int_a^b \varphi(x)dx, \quad (a < b).$$

Если $\varphi(x) < 0$, то въ написанныхъ неравенствахъ знаки измѣняются на обратные. Изъ послѣднихъ неравенствъ вытекаетъ формула (113).

Свойства 3 и 5 называются теоремами о *среднемъ значеніи интеграла.*

Свойство 3 есть частный случай свойства 5, соотвѣтствующій предположенію, что $\varphi(x) = 1$.

Упражненія. 1. *Показать, что значеніе интеграла* $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}}$, *гдѣ* $m > 2$, *заключается между 0,5 и 0,53.*

2. *Показать, что значеніе интеграла* $\int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$ *заключается между 1/3e и 1/3.*

§ 160. Распространеніе понятія интеграла. Опредѣленіе (108) опредѣленнаго интеграла предполагаетъ, что функція $f(x)$ сохраняетъ конечное значеніе въ интервалѣ и для предѣловъ интегрированія, и что предѣлы интеграла суть конечныя числа. Но можно распространить это опредѣленіе и на тѣ случаи, когда

указанныя условія не выполняются, сдѣлавъ дополненія въ самомъ опредѣленіи интеграла. Разсмотримъ отдѣльно случаи, когда подъинтегральная функція обращается въ ∞ для нѣкотораго значенія лежащаго въ интервалѣ интегрированія, и когда одинъ или оба предѣла безконечно велики.

1) Если $f(x)$ обращается въ ∞ при $x=c$, гдѣ $a<c<b$, то подъ $\int_a^b f(x)dx$ разумѣется *предѣлъ, къ которому стремится сумма*:

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

при стремленіи положительнаго числа ε *къ нулю.*

То же самое опредѣленіе прилагается къ тѣмъ случаямъ, когда подъинтегральная функція обращается въ безконечность при одномъ изъ предѣловъ интеграла:

$$\text{если } f(a)=\infty, \text{ то } \int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon=0}\int_{a+\varepsilon}^a f(x)dx;$$

$$\text{если } f(b)=\infty, \text{ то } \int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon=0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Примѣръ 1. Вычислимъ интегралъ $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. Такъ какъ подъинтегральная функція обращается въ ∞ при верхнемъ предѣлѣ, то

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon=0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon=0}\Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon=0}\Big[2-2\sqrt{\varepsilon}\Big]=2.$$

Примѣръ 2. $$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}\right]=\lim_{\varepsilon=0}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{-\varepsilon}+$$

$$+\lim_{\varepsilon=0}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_{\varepsilon}^{1}=2\lim_{\varepsilon=0}\Big[\frac{1}{\varepsilon}-1\Big]=\infty.$$

2) Въ случаѣ безконечныхъ предѣловъ принимаются слѣдующія опредѣленія:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a=-\infty} \int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a=\infty} \int_{-a}^{+a} f(x)dx.$$

Наприм., при $a>0$, $\int_0^{\infty} e^{-ax}dx = \lim_{b=\infty} \int_0^b e^{-ax}dx = \lim_{b=\infty} \left[-\frac{e^{-ax}}{a} \right]_0^b =$

$$= \lim_{b=\infty} \left[\frac{1-e^{-ab}}{a} \right] = \frac{1}{a}.$$

§ 161. Примѣръ вычисленія опредѣленнаго интеграла. Вычислимъ интегралъ:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx,$$

гдѣ n есть цѣлое положительное число.

Такъ какъ для неопредѣленнаго интеграла имѣемъ:

$$\int sin^n x dx = -\frac{sin^{n-1}x \cdot cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int sin^{n-2} x dx,$$

то для даннаго опредѣленнаго интеграла получимъ (§ 144):

$$J_n = \left[-\frac{sin^{n-1}x \cdot cos\, x}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

или

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Если n есть четное число, которое обозначимъ черезъ $2m$, то по этой формулѣ получимъ:

$$J_{2m}=\frac{2m-1}{2m}J_{2m-2};\quad J_{2m-2}=\frac{2m-3}{2m-2}J_{2m-4};\ldots;\ J_2=\frac{1}{2}J_0.$$

Перемноживъ почленно эти равенства, сокративъ результатъ и замѣтивъ, что $J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$, найдемъ:

$$J_{2m}=\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots2m}\,\frac{\pi}{2}\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (\beta)$$

Если n есть нечетное число, которое обозначимъ черезъ $2m+1$, то по формулѣ (α) найдемъ:

$$J_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}J_{2m-1};\quad J_{2m-1}=\frac{2m-2}{2m-1}J_{2m-3};\ldots J_3=\frac{2}{3}J_1.$$

Перемноживъ почленно эти равенства, сокративъ результатъ и замѣтивъ, что $J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sinx dx=\Big[-cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$, получимъ:

$$J_{2m+1}=\frac{2.4\ldots2m}{1.3\ldots(2m+1)}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (\gamma)$$

§ 162. **Формула Уоллиса (Wallis).** Изъ формулъ (β) и (γ) предыдущаго § легко получить выраженіе $\frac{\pi}{2}$ въ формѣ безконечнаго произведенія или такъ называемую формулу *Уоллиса*.

Такъ какъ $sin^n x > sin^{n+1}x > 0$ для x заключенныхъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то, удерживая обозначенія предыдущаго §, имѣемъ неравенства (§ 159, свойство 4):

$$J_{2m-1}>J_{2m}>J_{2m+1}\quad \text{или}\quad \frac{J_{2m-1}}{J_{2m+1}}>\frac{J_{2m}}{J_{2m+1}}>1.$$

Отсюда черезъ подстановку вмѣсто интеграловъ J ихъ значеній изъ формулъ (β) и (γ) предыдущаго § находимъ:

$$\frac{2m+1}{2m}>\frac{[1.3\ldots(2m-1)]^2(2m+1)}{[2.4\ldots2m]^2}\cdot\frac{\pi}{2}>1.$$

Увеличивая безгранично m и замѣчая, что

$$\lim_{m=\infty} \frac{2m+1}{2m}=1,$$

заключаемъ, что

$$\lim_{m=\infty} \frac{[1.3\ldots(2m-1)]^2(2m+1)}{[2.4\ldots2m]^2}\cdot\frac{\pi}{2}=1,$$

откуда получаемъ формулу *Уоллиса*:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m=\infty}\frac{[2.4\ldots2m]^2}{[1.3\ldots(2m-1)]^2.(2m+1)}.$$

§ 163. **Приближенное вычисленіе опредѣленныхъ интеграловъ. Формула трапецій.** Такъ какъ интегралъ $\int_a^b f(x)dx$ выражаетъ площадь $A'ABB'$, ограниченную дугой AB кривой $y=f(x)$, ординатами $A'A=f(a)$ и $B'B=f(b)$ и отрѣзкомъ $A'B'=(b-a)$ оси x (§ 144), то, вычисляя приближенно величину этой площади, мы получаемъ приближенное значеніе даннаго интеграла.

Укажемъ двѣ формулы, служащія для этой цѣли.

Раздѣливъ $A'B'$ на n равныхъ частей и построивъ въ точкахъ дѣленія ординаты кривой, мы разбиваемъ площадь $A'ABB'$ на n частей *). Каждую изъ нихъ замѣнимъ трапеціей, которая получается черезъ соединеніе прямой линіей концовъ ординатъ, ограничивающихъ эту часть.

Вычисляя сумму площадей этихъ трапецій, получимъ приближенное значеніе площади $A'ABB'$.

Обозначая ординаты, возставленныя въ точкахъ дѣленія отрѣзка $A'B'$ черезъ y_0, y_1, $y_2\ldots$, y_n, при чемъ $y_0=A'A$ и $y_n=B'B$, найдемъ слѣдующую *приближенную* формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \backsim \frac{b-a}{2n}\left\{y_0+y_n+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})\right\}\ldots(114)$$

Эта формула носитъ названіе *„формулы трапецій"*. Знакъ $\backsim$ есть знакъ приближеннаго равенства.

§ 164. **Формула Симпсона (Simpson).** Для полученія второй приближенной формулы раздѣлимъ отрѣзокъ $A'B'$ (см. § 163) на четное число $(2n)$ частей и обозначимъ ординаты кривой, воз-

---

*) Рекомендуется сдѣлать чертежъ.

ставленныя въ точкахъ дѣленія, черезъ y_0, y_1, $y_2, \ldots$, y_{2n}, при чемъ $y_0 = A'A$ и $y_{2n} = B'B$.

Черезъ концы каждыхъ трехъ смежныхъ ординатъ y_{2k}, y_{2k+1} и y_{2k+2} проведемъ *параболу второго порядка* съ осью, параллельною оси y, и площадь, ограниченную кривой $y = f(x)$, ея ординатами y_{2k} и y_{2k+2} и осью x, замѣнимъ площадью, ограниченною *параболой*, тѣми же ординатами и тѣмъ же отрѣзкомъ оси x. Суммируя полученныя площади, найдемъ приближенное значеніе площади $A'ABB'$.

Вычислимъ площадь, ограниченную параболой, ординатами y_0 и y_2 и осью x. Для упрощенія вычисленій перенесемъ начало координатъ въ точку A', оставивъ прежними направленія осей. Очевидно, что при этомъ преобразованіи системы координатъ ординаты кривой не измѣняются.

Уравненіе параболы, ограничивающей разсматриваемую площадь, имѣетъ видъ (§ 55):

$$y = A\xi^2 + B\xi + C,$$

гдѣ ξ есть абсцисса по новой системѣ, а A, B и C суть постоянные коэффиціенты, которые опредѣляются условіемъ, что парабола проходитъ черезъ точки $(0,\ y_0)$, $(h,\ y_1)$, $(2h,\ y_2)$, при чемъ $h = (b - a)/2n$.

Площадь этой параболы, заключенная между ординатами y_0 и y_2, выражается интеграломъ $\int_0^{2h} y d\xi$. Вычисляя его, находимъ:

$$\int_0^{2h} y d\xi = A\int_0^{2h} \xi^2 d\xi + B\int_0^{2h} \xi d\xi + C\int_0^{2h} d\xi =$$

$$= \frac{h}{3}\left[8Ah^2 + 6Bh + 6C\right].$$

По условію $y = y_0$ для $\xi = 0$; $y = y_1$ для $\xi = h$ и $y = y_2$ для $\xi = 2h$. Поэтому изъ уравненія параболы получаемъ:

$$y_0 = C;\ y_1 = Ah^2 + Bh + C;\ y_2 = 4Ah^2 + 2Bh + C.$$

Умноживъ второе изъ этихъ равенствъ на 4 и сложивъ съ первымъ и третьимъ, получимъ:

$$8Ah^2 + 6Bh + 6C = y_0 + 4y_1 + y_2.$$

Поэтому $\displaystyle\int_0^{2h} y d\xi = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

Пользуясь этой формулой, легко найти площадь каждой изъ указанныхъ выше параболъ. Суммируя площади всѣхъ параболъ, находимъ слѣдующую *приближенную* формулу (*Симпсона*):

$$\int_a^b f(x)dx \backsim \frac{b-a}{6n}\Big\{y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\cdot\cdot+y_{2n-2})+$$
$$+4(y_1+y_3+\cdot\cdot+y_{2n-1})\Big\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (115)$$

Не входя въ подробности, замѣтимъ, что формула (115) даетъ болѣе точные результаты, чѣмъ формула (114).

Примѣръ. Приложимъ формулу (115) къ вычисленію интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Раздѣливъ интервалъ (0,1) на 10 равныхъ частей, получимъ $h=0{,}1$. Вычисляя затѣмъ ординаты $y_0, y_1, \ldots, y_{10}$ кривой

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

при $x=0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ldots;\ 1$, находимъ:

$y_0=1$; $y_1=0{,}\ 990\ 099\ 0$; $y_2=0{,}\ 961\ 538\ 5$;
$y_3=0{,}\ 917\ 431\ 2$; $y_4=0{,}\ 862\ 069\ 0$;
$y_5=0{,}\ 800\ 000\ 0$; $y_6=0{,}\ 735\ 294\ 1$;
$y_7=0{,}\ 671\ 140\ 9$; $y_8=0{,}\ 609\ 756\ 1$;
$y_9=0{,}\ 552\ 486\ 2$;
$y_{10}=0{,}5$.

Подставивъ эти значенія h и ординатъ $y_0, y_1, \ldots, y_{10}$ въ формулу (115), получимъ:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \backsim 0{,}\ 785\ 398\ 15.$$

Замѣчая, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\ arctan x\ \Big]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

мы находимъ приближенное значеніе π:

$$\pi \backsim 3{,}\ 141\ 592\ 60.$$

3,14159265536

Сравнивая полученный результатъ съ извѣстными изъ другихъ источниковъ приближенными значеніями π, мы видимъ, что

формула Симпсона при дѣленіи интервала интегрированія на 10 частей даетъ результатъ, точный до *седьмого* десятичнаго знака.

Формула трапецій доставила бы при тѣхъ же условіяхъ для π значеніе 3,139926, точное только до перваго десятичнаго знака.

Упражненія.

1. Функція $f(x)$ называется *четною*, если $f(-x)=f(x)$; она называется *нечетною*, если $f(-x)=-f(x)$.

Доказать, что для четной функціи имѣетъ мѣсто равенство:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$$

а для нечетной функціи равенство:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = 0.$$

Дать геометрическое толкованіе указаннымъ равенствамъ.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$

3. $\int_0^{\pi} sin^3 x cos^2 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3 x cos^2 x dx = \frac{4}{15}.$

4. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$

5. $\begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-ax} sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}. \\ \int_0^{\infty} e^{-ax} cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \text{ при чемъ } a > 0. \end{cases}$

6. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+x)} = log 2.$

7. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{4}\pi a^2.$

8. *Показать, что при* $m > 1$ *значеніе интеграла*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^m}}$$

заключено между 0,8 *и* 1.

9. *Приложить формулу Симпсона къ приближенному вычисленію* $log 2$, *исходя изъ формулы:*

$$log 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

[$log 2 \backsim 0{,}693147.$].

ГЛАВА XVII.

О рядахъ. Сходимость и расходимость безконечныхъ рядовъ. Признаки сходимости. Ряды, члены которыхъ суть функціи перемѣннаго. Степенной рядъ. Ряды Maclaurin'a и Taylor'a. Разложеніе функцій въ ряды.

§ 165. **Сходящіеся и расходящіеся ряды.** Пусть мы имѣемъ безконечную послѣдовательность чиселъ

$$u_1, u_2, .. u_n, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

составленныхъ по опредѣленному закону.

Числа u_n называются *членами* послѣдовательности. Индексъ при буквѣ u указываетъ мѣсто, занимаемое даннымъ членомъ въ послѣдовательности; число u_n называется *общимъ* членомъ послѣдовательности.

Образуемъ изъ послѣдовательности (α) новую послѣдовательность чиселъ $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ по слѣдующему закону:

$$s_1 = u_1;\ s_2 = u_1 + u_2;\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3; \ldots;\ s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n; \ldots$$

При неограниченномъ возрастаніи числа n число слагаемыхъ суммы s_n безгранично увеличивается, и получаемая при этомъ сумма

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\beta)$$

безконечнаго числа слагаемыхъ называется *рядомъ*. Числа u называются членами ряда.

При безграничномъ возрастаніи числа n членовъ ряда (β) могутъ представиться слѣдующіе случаи: 1) s_n стремится къ *опредѣленному конечному предѣлу;* 2) s_n *возрастаетъ безгранично по абсолютному значенію;* 3) s_n *не возрастаетъ безгранично, но и не стремится къ опредѣленному предѣлу.*

Въ первомъ случаѣ рядъ (β) называется *сходящимся*, а предѣлъ, къ которому стремится s_n при возрастаніи n до ∞, называется *суммою* ряда (β). Во второмъ и третьемъ случаяхъ рядъ (β) называется *расходящимся* *).

Примѣръ 1. Рядъ

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$$

---

*) Въ *третьемъ* случаѣ рядъ называютъ также *колеблющимся*.

называется *геометрической* или *кратной* прогрессіей; *q—знаменателемъ* прогрессіи. Для s_n имѣемъ въ этомъ случаѣ:

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Предполагая $q > 0$, разсмотримъ отдѣльно случаи: $q > 1$; $q = 1$ и $q < 1$.

1) $q > 1$. Прогрессія представляетъ *расходящійся* рядъ. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ $\lim\limits_{n=\infty} q^n = \infty$ и $\lim\limits_{n=\infty} s_n = \infty$.

2) $q = 1$. Въ этомъ случаѣ $s_n = n$ и $\lim\limits_{n=\infty} s^n = \infty$. Прогрессія и въ этомъ случаѣ представляетъ *расходящійся* рядъ.

3) $q < 1$. Такъ какъ

$$s_n = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$$

и $\lim\limits_{n=\infty} q^n = \lim\limits_{n=\infty} [1 : (1/q^n)] = 0$, то $\lim\limits_{n=\infty} s_n = 1/(1-q) =$ конеч. числу. Поэтому при $q < 1$ прогрессія представляетъ *сходящійся* рядъ.

Примѣръ 2. Рядъ

$$\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

есть рядъ сходящійся.

Дѣйствительно, члены этого ряда можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{1\,.\,2} = 1 - \frac{1}{2};\ \frac{1}{2\,.\,3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}; \ldots$$

поэтому для s_n получимъ:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда заключаемъ, что $\lim\limits_{n=\infty} s_n = 1$.

Примѣръ 3. Рядъ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

называется *гармоническимъ*. Докажемъ, что онъ *расходящійся*.

Такъ какъ цѣлыя и положительныя степени числа 2 возрастаютъ безгранично, то можно для всякаго натуральнаго числа n найти такое число m, что $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$. При такомъ выборѣ m имѣетъ мѣсто неравенство:

$$s_n \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^m - 1} + \frac{1}{2^m}.$$

Распредѣлимъ слагаемыя второй части этого неравенства на группы такъ, чтобы послѣдній членъ каждой группы имѣлъ въ знаменателѣ число, представляющее степень 2:

$$s_n \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right).$$

Отбросивъ во второй части первое слагаемое, т.-е. 1, мы получимъ:

$$s_n > \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right).$$

Вторая часть послѣдняго неравенства представляетъ сумму m членовъ, изъ которыхъ первый содержитъ одно число, второй есть сумма 2 чиселъ, третій — сумма 2^2 чиселъ,.., послѣдній — сумма 2^{m-1} чиселъ. Замѣнивъ всѣ слагаемыя каждаго члена послѣднимъ слагаемымъ, входящимъ въ составъ этого члена, мы получимъ вмѣсто каждаго члена 1/2. Поэтому

$$s_n > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}, \text{ (m слагаемыхъ)}$$

или $s_n > m/2$. При неограниченномъ возрастаніи числа n число m возрастаетъ также неограниченно. Поэтому изъ послѣдняго неравенства слѣдуетъ, что $\lim\limits_{n=\infty} s_n = \infty$, т.-е. что *гармоническій рядъ есть рядъ расходящійся.*

Примѣръ 4. Рядъ

$$3 - 2 - 1 + 3 - 2 - 1 + 3 - 2 - 1 + \ldots.$$

есть рядъ расходящійся (колеблющійся).

Это легко видѣть изъ того, что

$$s_{3k}=0,\ s_{3k+1}=3,\ s_{3k+2}=1,$$

гдѣ k есть цѣлое положительное число.

Примѣръ 5. См. въ § 103, примѣръ 3.

§ 166. **Признаки сходимости. Необходимый признакъ сходимости.** Убѣдившись изъ приведенныхъ въ предыдущемъ § примѣровъ въ существованiи сходящихся и расходящихся рядовъ, обратимся къ *признакамъ*, по которымъ можно было бы судить о сходимости или расходимости даннаго ряда.

Признаки сходимости раздѣляются на *двѣ* категорiи: признаки *необходимые* и признаки *достаточные*.

Необходимымъ признакомъ сходимости ряда

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots.. \qquad (\alpha)$$

является стремленiе его общаго члена u_n *къ нулю при возрастанiи* n *до* ∞.

Дѣйствительно, если рядъ (α) сходящiйся и s его сумма, то

$$\lim_{n=\infty} s_n=s;\ \lim_{n=\infty} s_{n-1}=s;$$

слѣд., $\lim\limits_{n=\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim\limits_{n=\infty} u_n=0.$

Но этотъ признакъ не является признакомъ *достаточнымъ*, т.-е. при выполненiи условiя $\lim\limits_{n=\infty} u_n=0$ рядъ можетъ оказаться расходящимся. Примѣромъ такого ряда служитъ разсмотрѣнный въ предыдущемъ § *гармоническiй* рядъ.

§ 167. **Леммы сравненiя.** Общимъ прiемомъ при выводѣ достаточныхъ признаковъ сходимости служитъ *сравненiе* изучаемаго ряда съ такимъ, сходимость или расходимость котораго установлена.

Двѣ слѣдующiя леммы указываютъ возможный способъ сравненiя рядовъ.

Лемма 1. *Даны два ряда:*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots (u)$$
$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots (v)$$

всѣ члены которыхъ положительны.

Если рядъ (v) *сходящiйся и* $u_n\leqslant v_n$ *для всѣхъ значенiй индекса* n, *то рядъ* (u) *также сходящiйся.*

Если рядъ (v) *расходящiйся и* $u_n\geqslant v_n$ *для всѣхъ значенiй индекса* n, *то рядъ* (u) *также расходящiйся.*

Обозначивъ суммы n членовъ рядовъ (u) и (v) соотвѣтственно черезъ s_n и s'_n, по условіямъ первой части леммы получимъ неравенства:

$$0 < s_n < s'_n.$$

Такъ какъ при возрастаніи n сумма s'_n стремится къ опредѣленному предѣлу, а s_n, возрастая вмѣстѣ съ n, остается меньше этого предѣла, то и s_n стремится къ конечному предѣлу при неограниченномъ возрастаніи n. Слѣд., рядъ (u) сходящійся.

При условіяхъ второй части леммы имѣемъ неравенства

$$0 < s'_n < s_n,$$

которыя въ связи съ условіемъ, что s'_n возрастаетъ безгранично при возрастаніи n, приводятъ къ заключенію, что рядъ (u) расходящійся.

Лемма 2. *Если для всякой пары соотвѣтственныхъ членовъ рядовъ (u) и (v) предыдущей леммы имѣетъ мѣсто соотношеніе:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

то рядъ (u) сходящійся одновременно съ рядомъ (v).

Если же

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

то рядъ (u) расходящійся одновременно съ рядомъ (v).

Удерживая прежнія обозначенія, имѣемъ:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1\left(1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_1} + \ldots + \frac{u_n}{u_1}\right) =$$

$$= u_1\left(1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1} + \ldots + \frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_2}{u_1}\right).$$

Отсюда при условіи, что

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

черезъ замѣну отношенія двухъ смежныхъ членовъ ряда (u) отношеніемъ соотвѣтственныхъ членовъ ряда (v) послѣ нѣкоторыхъ упрощеній находимъ:

$$s_n \leqslant \frac{u_1}{v_1}(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) \text{ или } s \leqslant \frac{u_1}{v_1} s'_n.$$

Изъ послѣдняго неравенства слѣдуетъ, что, если рядъ (v) сходящійся, то и рядъ (u) сходящійся.

Вторая часть леммы доказывается аналогичнымъ способомъ.

Примѣчаніе. Заключенія обѣихъ леммъ остаются справедливыми, если указанныя въ нихъ соотношенія между членами рядовъ (u) и (v) имѣютъ мѣсто не для всѣхъ значеній индекса n, а только для значеній его, не меньшихъ нѣкотораго числа p. Дѣйствительно, въ такомъ случаѣ условіямъ леммъ удовлетворяютъ ряды

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{p+m} + \cdots, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (u')$$
$$v_p + v_{p+1} + \cdots + v_{p+m} + \cdots, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (v')$$

получаемые соотвѣтственно изъ рядовъ (u) и (v) черезъ отбрасываніе *конечнаго* числа начальныхъ членовъ, что не измѣняетъ условій ихъ сходимости.

§ 168. **Признаки сходимости знакопостоянныхъ рядовъ.** Приложимъ леммы предыдущаго § къ выводу двухъ *достаточныхъ признаковъ сходимости знакопостоянныхъ рядовъ*, т.-е. такихъ рядовъ, всѣ члены которыхъ имѣютъ одинаковый знакъ.

Пусть имѣемъ рядъ

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (u)$$

всѣ члены котораго *положительны* *).

Сравнимъ члены его съ соотвѣтственными членами геометрической прогрессіи

$$a + a^2 + \cdots + a_n + \cdots, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

гдѣ $a > 0$.

На основаніи первой леммы предыдущаго § рядъ (u) *сходящійся*, если при $a < 1$ для $n \geqslant p$ имѣемъ: $u_n \leqslant a^n$, и рядъ (u) *расходящійся*, если при $a > 1$ для $n \geqslant p$ имѣемъ: $u_n \geqslant a^n$, при чемъ p есть нѣкоторое опредѣленное натуральное число.

Такъ какъ въ первомъ случаѣ $\sqrt[n]{u_n} \leqslant a < 1$, а во второмъ $\sqrt[n]{u_n} \geqslant a > 1$, то полученный результатъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ: *знакопостоянный рядъ* (u) *сходящійся, если* $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, *и расходящійся, если* $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$.

Это заключеніе представляетъ одинъ изъ достаточныхъ признаковъ сходимости знакопостоянныхъ рядовъ. Другой достаточный признакъ сходимости получается при помощи второй леммы предыдущаго § сравненіемъ рядовъ (u) и (a).

---

*) Легко видѣть, что къ этому случаю приводится и случай знакопостояннаго ряда съ отрицательными членами.

Если для $n \geqslant p$ имѣютъ мѣсто неравенства

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \alpha < 1,$$

то рядъ (u) *сходящійся*. Если же для $n \geqslant p$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \alpha > 1,$$

то рядъ (u) *расходящійся*.

Этотъ признакъ сходимости можно формулировать слѣдующимъ образомъ: *если* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, *то рядъ* ($u$) *сходящійся, если же* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, *то рядъ* ($u$) *расходящійся.*

Слѣдуетъ замѣтить, что указанный признакъ не рѣшаетъ вопроса о сходимости, если $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Изъ двухъ указанныхъ признаковъ сходимости *второй* является болѣе простымъ и удобнымъ въ приложеніяхъ, чѣмъ *первый* *).

Примѣры. 1. Рядъ $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots$ *сходящійся*, потому что $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} = 0$ (см. § 103, примѣръ 3).

2. Рядъ $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} + \ldots$ *сходящійся*, потому что

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{2n-1}{4(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

§ 169. **Признакъ сходимости знакочередующагося ряда.** *Знакочередующимся* называется такой рядъ, послѣдовательные члены котораго имѣютъ разные знаки.

Для такого ряда *необходимый* признакъ сходимости (§ 166) является и *достаточнымъ*.

---

*) О взаимномъ отношеніи этихъ двухъ признаковъ см. *Гурса, Курсъ математическаго анализа*, т. I, § 159, *и Г. Ковалевскій, Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій*, §§ 79—81.

Пусть имѣемъ знакочередующійся рядъ

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + u_{2p-1} - u_{2p} - \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (u)$$

гдѣ u съ индексами обозначаютъ положительныя числа. Докажемъ, что для сходимости его достаточно, чтобы, начиная съ извѣстнаго мѣста, члены его убывали по абсолютному значенію и чтобы

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Предполагая, что $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$, легко видѣть, что суммы s_1, s_3, s_5,.. *нечетнаго* числа членовъ представляютъ рядъ *убывающихъ* чиселъ, а суммы s_2, s_4, s_6,... *четнаго* числа членовъ — рядъ *возрастающихъ* чиселъ. Обозначая черезъ s сумму ряда (u) и сравнивая ее съ суммами s_{2m} и s_{2m+1}, находимъ неравенства:

$$s_{2m} < s < s_{2m+1}.$$

Изъ этихъ неравенствъ вытекаютъ слѣдующія заключенія:

1) *s есть число конечное, такъ какъ оно заключено между двумя конечными числами*; 2) *s есть общій предѣлъ, къ которому стремятся суммы s_{2m} и s_{2m+1} при неограниченномъ возрастаніи числа m.* Дѣйствительно, замѣтивъ, что

$$s_{2m+1} - s_{2m} = u_{2m+1},$$

изъ послѣднихъ неравенствъ находимъ:

$$s - s_{2m} < u_{2m+1}; \quad s_{2m+1} - s < u_{2m+1}.$$

Но по предположенію $\lim\limits_{m=\infty} u_{2m+1} = 0$; слѣдовательно, s служитъ предѣломъ суммъ s_{2m} и s_{2m+1} при безграничномъ возрастаніи m (§ 94).

Примѣръ. Рядъ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ сходящійся, потому что члены его по абсолютному значенію убываютъ и $\lim u_n = 0$ при $n = \infty$.

§ 170. **Абсолютно сходящіеся ряды.** Рядъ называется *абсолютно* сходящимся, если сходящимся оказывается рядъ, членами котораго служатъ абсолютныя значенія членовъ даннаго ряда.

Теорема. *Если рядъ*

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (U)$$

сходящійся, то и рядъ

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \ldots \ldots \ldots (u)$$

сходящійся.

Пусть S и S_n суть соотвѣтственно сумма ряда (U) и сумма n первыхъ членовъ его, а s_n сумма n первыхъ членовъ ряда (u).

Сравнивая s_n, S_n и S, находимъ:

$$| s_n | \leqslant S_n < S.$$

Такъ какъ S, по условію, есть конечное число, то эти неравенства показываютъ, что s_n есть также конечное число при всякомъ n. Чтобы доказать, что s_n стремится при неограниченномъ возрастаніи n къ опредѣленному предѣлу, разсмотримъ суммы s'_n и $-s''_n$ соотвѣтственно положительныхъ и отрицательныхъ членовъ, имѣющихся въ числѣ n первыхъ членовъ ряда (u). Разность $s'_n - s''_n$ равна s_n. Каждая изъ суммъ s'_n и s''_n *возрастаетъ* вмѣстѣ съ n, но остается *меньше* S; слѣдов., s'_n и s''_n имѣютъ предѣлы (§ 102). Обозначимъ ихъ соотвѣтственно черезъ s' и s''. Изъ равенства

$$s_n = s'_n - s''_n$$

слѣдуетъ, что

$$\lim_{n=\infty} s_n = s' - s''.$$

Теорема такимъ образомъ доказана.

Обратная теорема несправедлива: сходимость ряда (u) не влечетъ за собою сходимости ряда (U), какъ это видно изъ примѣра, приведеннаго въ предыдущемъ §. Рядъ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

сходящійся, но не абсолютно, такъ какъ рядъ, получаемый изъ него замѣною всѣхъ его членовъ ихъ абсолютными значеніями, есть рядъ *гармоническій*, расходимость котораго доказана въ § 165.

§ 171. **Свойства абсолютно сходящагося ряда.** *Абсолютно сходящійся рядъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что измѣненіе порядка его членовъ не вліяетъ ни на сходимость ряда, ни на величину его суммы.*

Докажемъ сначала это предложеніе для знакопостояннаго ряда съ *положительными* членами.

Пусть

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \ldots \ldots \ldots (u)$$

есть сходящійся рядъ съ положительными членами и суммою s. Переставивъ какимъ-нибудь образомъ его члены, получимъ новый рядъ

$$u'_1+u'_2+\ldots+u'_m+\ldots, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (u')$$

сумму котораго обозначимъ черезъ s'.

Каково бы ни было число m, можно взять n достаточно большимъ для того, чтобы m первыхъ членовъ ряда (u') заключались въ числѣ n первыхъ членовъ ряда (u). Такъ какъ, по условію, всѣ члены ряда (u) положительны, то при такомъ выборѣ числа n будутъ имѣть мѣсто неравенства:

$$s'_m \leqslant s_n < s,$$

гдѣ s'_m и s_n обозначаютъ соотвѣтственно суммы m членовъ ряда (u') и n членовъ ряда (u). Отсюда слѣдуетъ, что $\lim\limits_{m=\infty} s'_m \leqslant s$, или $s' \leqslant s$.

Съ другой стороны, при произвольномъ n можно взять m достаточно большимъ для того, чтобы въ суммѣ s'_m содержались всѣ члены суммы s_n. Поэтому $s'_m \geqslant s_n$ и $s' \geqslant s$. Сопоставляя полученныя соотношенія между s и s', заключаемъ, что $s'=s$, т.-е. что рядъ (u') сходящійся и сумма его равна суммѣ ряда (u).

Предположимъ теперь, что рядъ (u) *знакоперемѣнный и абсолютно сходящійся*. Его сумма s равна $s'-s''$, гдѣ s' есть сумма его положительныхъ членовъ, а $-s''$ есть сумма его отрицательныхъ членовъ (§ 170). Ряды, суммами которыхъ служатъ s' и s'', имѣютъ положительные члены; поэтому въ нихъ можно измѣнить порядокъ членовъ, не измѣняя ихъ суммъ. Это измѣненіе порядка членовъ въ рядѣ съ суммою s' можно сдѣлать такъ, чтобы члены его шли въ томъ же порядкѣ, въ какомъ идутъ *положительные* члены ряда (u'), а въ рядѣ съ суммою $-s''$ можно взять члены въ томъ порядкѣ, въ какомъ идутъ *отрицательные* члены ряда (u'). Сумма ряда (u') оказывается такимъ образомъ равной $s'-s''$, т.-е. равной суммѣ ряда (u).

Въ дополненіе къ этой теоремѣ приведемъ примѣры, которые показываютъ, что сходимость и сумма не абсолютно сходящихся рядовъ можетъ зависѣть отъ порядка членовъ.

Рядъ $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ сходящійся, но не абсолютно (§ 170).

Сумма его заключается (§ 169) между числами $s_4=0{,}583\ldots$ и $s_5=0{,}783\ldots$

Рядъ

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{4}+\ldots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}\right)-\frac{1}{2n}+\ldots,$$

получаемый изъ перваго извѣстной перестановкой его членовъ, есть знакочередующійся съ безгранично убывающими членами. Слѣд., онъ сходящійся (§ 169). Сумма его заключается между числами $s_4'=0{,}926\ldots$ и $s_5'=1{,}128\ldots$ Изъ этого примѣра видно, что сумма не абсолютно сходящагося ряда можетъ измѣниться отъ перестановки членовъ.

Разсмотримъ рядъ

$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (k)$$

Этотъ рядъ, какъ знакочередующійся съ безгранично убывающими членами, сходящійся. Замѣна его членовъ ихъ абсолютными значеніями приводитъ къ ряду, члены котораго, начиная со второго, болѣе соотвѣтственныхъ членовъ гармоническаго ряда. Слѣд. (§§ 167, 165), данный рядъ не абсолютно сходящійся.

Докажемъ, что получаемый перестановкой членовъ ряда (k) рядъ

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots\ldots\ldots \quad (k')$$

есть рядъ *расходящійся.*

Обозначая черезъ s сумму ряда (k) и черезъ s' сумму ряда (k'), легко вывести слѣдующее соотношеніе:

$$s'_{3n}-s_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}.$$

Число членовъ второй части этого равенства равно числу нечетныхъ чиселъ отъ 1 до $2n-1$ включительно, т.-е. равно n. А такъ какъ изъ слагаемыхъ второй части наименьшимъ является послѣднее, то

$$s'_{3n}-s_{2n}>\frac{n}{\sqrt{4n-1}} \text{ и } s'_{3n}>s_{2n}+\frac{n}{\sqrt{4n-1}}.$$

Дробь $n/\sqrt{4n-1}$ неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ n. Поэтому

$$\lim_{n=\infty} s'_{3n}=\infty,$$

т.-е. рядъ (k') расходящійся.

Этотъ примѣръ показываетъ, что перестановка членовъ не абсолютно сходящагося ряда можетъ повлечь за собою потерю сходимости.

§ 172. **Ряды съ комплексными членами.** Рядъ

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots (u)$$

члены котораго суть *комплексныя* числа, т.-е. $u_n = a_n + b_n i$, гдѣ a_n и b_n суть *дѣйствительныя* числа, а $i = \sqrt{-1}$, называется сходящимся, если сходящимися оказываются ряды

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

членами которыхъ служатъ дѣйствительныя части и коэффиціенты при мнимыхъ частяхъ членовъ даннаго ряда. Если суммы рядовъ (a) и (b) суть соотвѣтственно P и Q, то сумма ряда (u) равна $P + iQ$.

Достаточнымъ признакомъ сходимости ряда (u) служитъ сходимость ряда

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \quad \ldots\ldots (|u|)$$

члены котораго суть *модули* соотвѣтственныхъ членовъ ряда (u).

Для доказательства этого предложенія замѣтимъ, что

$$|u| = +\sqrt{a_n^2 + b_n^2};$$

поэтому $|a_n| \leqslant |u_n|$ и $|b_n| \leqslant |u_n|$. Если рядъ $(|u|)$ сходящійся, то (§§ 167, 170) сходящимися будутъ и ряды (a) и (b); слѣд., рядъ (u) также сходящійся.

Во случаѣ сходимости ряда $(|u|)$ рядъ (u) называется абсолютно *сходящимся* (сравн. § 170).

Примѣръ. *Доказать абсолютную сходимость ряда:*

$$\frac{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}{1^2} + \frac{\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta}{2^2} + \ldots + \frac{\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta}{n^2} + \ldots \quad (\alpha)$$

Такъ какъ

$$\left|\frac{\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2},$$

то задача сводится къ доказательству сходимости ряда:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Представимъ этотъ рядъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{(2+1)^2}\right) + \left[\frac{1}{(2^2)^2} + \frac{1}{(2^2+1)^2} + \frac{1}{(2^2+2)^2} + \frac{1}{(2^2+3)^2}\right] + \ldots$$
$$+ \left[\frac{1}{(2^p)^2} + \frac{1}{(2^p+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2^{p+1}-1)^2}\right] + \ldots$$

Такъ какъ

$$\frac{1}{(2^p)^2}+\frac{1}{(2^p+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2^{p+1}-1)^2}<\frac{1}{(2^p)^2}\cdot 2^p=\frac{1}{2^p},$$

то члены предыдущаго ряда, начиная со второго, меньше соотвѣтственныхъ членовъ безконечно убывающей прогрессіи:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$$

Слѣд. (§ 167), рядъ (β) сходящійся, а рядъ (α) абсолютно сходящійся.

§ 173. **Степенной рядъ.** Кромѣ рядовъ съ постоянными членами существуютъ ряды, члены которыхъ суть *функціи одного или нѣсколькихъ перемѣнныхъ*. Изъ такихъ рядовъ мы разсмотримъ рядъ, расположенный по *возрастающимъ цѣлымъ и положительнымъ степенямъ перемѣннаго*. Этотъ рядъ называется *степеннымъ*. Общій видъ его таковъ:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

гдѣ a со значками обозначаютъ постоянные коэффиціенты ряда, а x есть перемѣнное. Какъ числа a, такъ и x могутъ быть дѣйствительными и комплексными.

Вопросъ о сходимости ряда (a) сводится къ вопросу объ *опредѣленіи тѣхъ значеній перемѣннаго x, при которыхъ онъ сходящійся.*

Достаточнымъ признакомъ сходимости ряда (α) служитъ сходимость ряда

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\ldots+|a_nx^n|+\ldots, \quad \ldots\ldots (\beta)$$

члены котораго суть абсолютныя значенія или модули членовъ ряда (α) [§§ 170, 172].

Пользуясь вторымъ изъ признаковъ сходимости, указанныхъ въ § 168, мы находимъ слѣдующее условіе сходимости ряда (α): *рядъ (α) есть рядъ абсолютно сходящійся для всѣхъ значеній x, удовлетворяющихъ неравенству*:

$$\lim_{n=\infty}\left|a_nx^n : a_{n-1}x^{n-1}\right|<1.$$

Отсюда находимъ:

$$|x|<\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Если x есть *дѣйствительное* перемѣнное, то это неравенство опредѣляетъ *интервалъ сходимости*, если же x есть *комплексное* перемѣнное, то оно даетъ *радіусъ круга сходимости*. Дѣйствительно, если вторую часть неравенства (γ) обозначимъ черезъ k, то при x *дѣйствительномъ* рядъ (α) есть сходящійся для всѣхъ значеній x, лежащихъ въ интервалѣ $(-k, k)$, границами котораго служатъ числа $-k$ и $+k$; при x *комплексномъ* рядъ (α) есть сходящійся для всѣхъ значеній x, изображенія которыхъ лежатъ внутри круга, описаннаго изъ начала координатъ радіусомъ, равнымъ k, такъ какъ модули этихъ значеній перемѣннаго x меньше k. Этотъ кругъ называется *кругомъ сходимости*.

Примѣры. 1. *Рядъ.*

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+..+\frac{x^n}{1.2...n}+\dots$$

сходящійся при всѣхъ значеніяхъ x.

Дѣйствительно, условіе (γ) для даннаго ряда обращается въ неравенство:

$$x|<\lim_{n=\infty}\frac{1}{1.2...(n-1)}:\frac{1}{1.2...n},$$

изъ котораго находимъ: $|x|<\infty$.

2. *Рядъ*

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{3}-..+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots$$

есть рядъ абсолютно сходящійся при $|x|<1$.

Для даннаго ряда имѣемъ:

$$a_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n-1};\quad a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n};\lim_{n=\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|=\lim_{n=\infty}\left|\frac{n}{n-1}\right|=1.$$

Поэтому изъ неравенства (γ) находимъ: $|x|<1$.

Если x есть дѣйствительное перемѣнное, то найденное условіе сходимости можно формулировать такъ: *данный рядъ есть абсолютно сходящійся въ интервалѣ* $(-1, 1)$.

Замѣтимъ кромѣ того, что рядъ остается сходящимся (но не абсолютно) при $x=1$ и является расходящимся при $x=-1$ (§§ 165, 169, 170).

Если x есть комплексное перемѣнное, то изъ предыдущаго заключаемъ, что радіусъ круга сходимости равенъ 1.

§ 174. **Равномѣрная сходимость степенного ряда.** Пусть рядъ

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

въ которомъ коэффиціенты и перемѣнное *дѣйствительны*, есть рядъ абсолютно сходящійся въ интервалѣ $(-\alpha, \alpha)$, гдѣ $\alpha > 0$.

Называя его сумму черезъ $s(x)$, сумму его n первыхъ членовъ черезъ $s_n(x)$ и сумму всѣхъ остальныхъ (*остатокъ* ряда) черезъ $R_n(x)$, находимъ соотношеніе:

$$s(x) = s_n(x) + R_n(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

Въ этой формулѣ $s_n(x)$ и $R_n(x)$ суть функціи x, которыя стремятся при возрастаніи n до ∞ соотвѣтственно къ предѣламъ $s(x)$ и *нуль*, такъ какъ, по предположенію, рядъ (a) сходящійся.

Стремленіе $R_n(x)$ къ нулю при возрастаніи n до ∞ указываетъ, что можно найти такое натуральное число n, что каждый изъ членовъ послѣдовательности

$$R_n(x),\ R_{n+1}(x), \ldots$$

окажется по абсолютному значенію меньше произвольнаго какъ угодно малаго положительнаго числа ε.

Въ общемъ случаѣ, т.-е. для сходящихся рядовъ, членами которыхъ служатъ функціи перемѣннаго x, значеніе n зависитъ отъ значенія перемѣннаго x. Если это значеніе n *одинаково* для всѣхъ значеній перемѣннаго x, заключенныхъ въ интервалѣ сходимости, то рядъ называется *равномѣрно сходящимся*.

Докажемъ, что степенной рядъ обладаетъ свойствомъ равномѣрной сходимости.

Пусть α_1 есть положительное число, меньшее α. По предположенію, рядъ (a) для $x = \alpha_1$ абсолютно сходящійся. Слѣдовательно

$$r_n = |a_n \alpha_1^n| + |a_{n-1} \alpha_1^{n-1}| + \ldots$$

стремится къ нулю при возрастаніи n до ∞ и можно найти такое n, чтобы $r_n < \varepsilon$, гдѣ ε есть произвольное какъ угодно малое положительное число.

Но для $|x| < \alpha_1$ имѣемъ:

$$|R_n(x)| \leqslant |a_n x^n| + |a_{n+1} x^{n+1}| + \ldots < r_n;$$

слѣд., $|R_n(x)| < \varepsilon$ для всѣхъ значеній x, лежащихъ въ интервалѣ $(-\alpha_1, \alpha_1)$ или въ интервалѣ $(-\alpha, \alpha)$. Такимъ образомъ равномѣрная сходимость степенного ряда доказана.

Въ дополненіе къ сказанному приведемъ примѣръ неравномѣрно сходящагося ряда.

Разсмотримъ рядъ:

$$(1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\ldots+x^n(1-x)+\ldots$$

Суммируя n первыхъ членовъ его, находимъ:

$$s_n = 1 - x + x - x^2 + x^2 - x^3 + \ldots - x^n = 1 - x^n.$$

Отсюда видно, что данный рядъ сходящійся въ интервалѣ $(-1, 1)$. Сумма его $=0$ для $x=1$ и равна 1, или $|x|<1$. Дополнительный членъ R_n для $x \neq 1$ равенъ $-x^n$.

Для всякаго значенія x, абсолютное значеніе котораго меньше 1, можно найти такое число N, чтобы при $n \geq N$ удовлетворялось неравенство: $|x^n| < \varepsilon$, гдѣ ε есть произвольно малое положительное число. Но это число N не остается одинаковымъ для всѣхъ значеній x въ интервалѣ сходимости ряда: оно неограниченно возрастаетъ при приближеніи x къ 1. Слѣдовательно, данный рядъ въ интервалѣ $(-1, 1)$ сходящійся, но неравномѣрно.

§ 175. Непрерывность функціи, опредѣляемой степеннымъ рядомъ. *Сумма $s(x)$ ряда (a)* (см. § 174) *есть непрерывная функція перемѣннаго x для значеній его, заключенныхъ въ интервалѣ сходимости.*

Пусть x и $x+h$ суть два значенія перемѣннаго, лежащія въ интервалѣ $(-a, a)$. По уравненію (b) § 174 имѣемъ:

$$s(x) = s_n(x) + R_n(x)$$
$$s(x+h) = s_n(x+h) + R_n(x+h).$$

Вычитая почленно первое равенство изъ второго, находимъ:

$$s(x+h) - s(x) = s_n(x+h) - s_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x).$$

Отсюда получаемъ для абсолютнаго значенія первой части слѣдующее неравенство:

$$|s(x+h) - s(x)| \leqslant |s_n(x+h) - s_n(x)| + |R_n(x+h)| + |R_n(x)|.$$

Но $s_n(x)$, какъ цѣлая функція перемѣннаго x, непрерывна для всѣхъ значеній x. Поэтому при произвольномъ положительномъ числѣ ε и любомъ n можно найти такое положительное число δ, чтобы при $|h| < \delta$ имѣло мѣсто неравенство:

$$|s_n(x+h) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Кромѣ того, по предыдущему §, можно взять n достаточно большимъ для того, чтобы

$$|R_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что при данномъ ε и $|h| < \delta$ для всѣхъ значеній x въ интервалѣ $(-\alpha, \alpha)$ удовлетворяется неравенство

$$|s(x+h) - s(x)| < \varepsilon,$$

показывающее непрерывность функціи $s(x)$ въ интервалѣ сходимости ряда (a) (§ 16).

§ 176. **Производная функціи, опредѣляемой степеннымъ рядомъ.** Пусть рядъ (a) (см. § 174) есть *абсолютно сходящійся* рядъ для всѣхъ значеній x, абсолютное значеніе которыхъ *не больше* α. По доказанному въ предыдущемъ § онъ опредѣляетъ функцію $f(x)$ *непрерывную въ интервалѣ* $(-\alpha, \alpha)$.

Если x и $x+h$ суть два значенія перемѣннаго, заключенныя внутри интервала $(-\alpha, \alpha)$, то

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$
$$f(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \ldots + a_n(x+h)^n + \ldots$$

Составляя разность $f(x+h)$ и $f(x)$ и раздѣливъ ее на h, находимъ:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$
$$= a_1\frac{(x+h)-x}{h} + a_2\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + \ldots + a_n\frac{(x+h)^n - x^n}{h} + \ldots \quad (a')$$

Докажемъ, что вторая часть равенства (a'), разсматриваемая, какъ функція перемѣннаго h, представляетъ абсолютно сходящійся рядъ для значеній h, заключенныхъ въ интервалѣ $(-\beta, \beta)$, гдѣ $\beta = \alpha - |x|$.

Пользуясь формулой бинома Ньютона, второй множитель общаго члена ряда (a') можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = C^1_n x^{n-1} + C^2_n x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1},$$

гдѣ C^k_n суть биноміальные коэффиціенты.

Пусть $|x| = X$, $|h| = H$. Сравненіе абсолютныхъ значеній лѣвой и правой части предыдущаго равенства даетъ:

$$\left|\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\right| \leqslant C^1_n X^{n-1} + C^2_n X^{n-2}H + \ldots + H^{n-1}.$$

При $H < \beta$ изъ этого соотношенія находимъ:

$$\left|\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\right| < C^1_n X^{n-1} + C^2_n X^{n-2}\beta + \ldots + \beta^{n-1},$$

или

$$\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\right|<\frac{(X+\beta)^n-X^n}{\beta},$$

или, наконецъ,

$$\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\right|<\frac{\alpha^n-X^n}{\beta}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (b)$$

Рядъ (a), по предположенію, есть рядъ абсолютно сходящійся, если $|x|\leqslant\alpha$; поэтому абсолютно сходящимся для того же интервала является рядъ:

$$a_1\frac{\alpha-X}{\beta}+a_2\frac{\alpha^2-X^2}{\beta}+\ldots+a_n\frac{\alpha^n-X^n}{\beta}+\ldots$$

Изъ этого, принимая во вниманіе неравенство (b), заключаемъ (§§ 167, 170) объ абсолютной сходимости ряда (a') для значеній x въ интервалѣ $(-\alpha, \alpha)$ и, слѣд., значеній h въ интервалѣ $(-\beta, \beta)$.

Полагая въ равенствѣ (a') $h=0$, на что мы имѣемъ право, такъ какъ *нуль* заключается въ интервалѣ $(-\beta, \beta)$, получимъ (§§ 104, 105):

$$f'(x)=a_1+2a_2x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots.\ \ .\ .\ .\ .\ .\ (c)$$

Полученный результатъ можно формулировать такъ: *функція $f(x)$, опредѣляемая степеннымъ рядомъ* (a), *имѣетъ производную, выражающуюся степеннымъ рядомъ* (c), *члены котораго суть производныя членовъ ряда* (a); *оба ряда имѣютъ одинаковый интервалъ сходимости.*

§ 177. **Интегралъ функціи, опредѣляемой степеннымъ рядомъ.** Интегрируя почленно рядъ (a), находимъ (форм. 93) рядъ

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots,\ \ .\ .\ .\ .\ (d)$$

сходящійся въ интервалѣ $(-\alpha, \alpha)$; дѣйствительно, рядъ

$$a_0+\frac{a_1}{2}x+\frac{a_2}{3}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^n+\ldots$$

въ указанномъ интервалѣ сходящійся, такъ какъ члены его, начиная со второго, по абсолютному значенію меньше соотвѣтственныхъ членовъ ряда (a); умноженіе же всѣхъ членовъ этого ряда

на x не измѣняетъ условій сходимости и приводитъ къ ряду (d). Если $F(x)$ есть функція, опредѣляемая рядомъ (d), то (§ 176)

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x),$$

т.-е. $F(x)$ есть интегралъ $\int f(x)dx$. Кромѣ того легко видѣть, что $F(x)$ обращается въ нуль при $x=0$. Поэтому

$$\int_0^x f(x)dx=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots$$

Итакъ, *интегралъ функціи* $f(x)$, *опредѣляемой степеннымъ рядомъ* (a), *выражается рядомъ* (d), *члены котораго суть интегралы членовъ ряда* (a); *ряды* (a) *и* (d) *имѣютъ одинаковый интервалъ сходимости.*

§ 178. **Разложеніе функцій въ ряды.** Изъ § 176 слѣдуетъ, что, если $f(x)$ обозначаетъ сумму ряда (a) съ интерваломъ ($-\alpha$, α) сходимости, то для всѣхъ значеній x, лежащихъ въ этомъ интервалѣ, имѣютъ мѣсто равенства:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\ldots, \quad (a)$$
$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,$$
$$f''(x)=1.2a_2+2.3a_3x+\ldots+(n-1)na_nx^{n-2}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f^{(n)}(x)=1.2\ldots(n-1)na_n+2.3\ldots n(n+1)a_{n+1}x+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Полагая въ этихъ формулахъ $x=0$, находимъ:

$$a_0=f(0);\ a_1=f'(0);\ a_2=\frac{f''(0)}{1.2};\ a_3=\frac{f'''(0)}{1.2.3}\ldots;\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n};\ldots$$

Подстановка этихъ значеній a въ рядъ (a) преобразуетъ его въ слѣдующій:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}x^n+\ldots \quad (e)$$

Эта формула, какъ явившаяся результатомъ разсмотрѣнія степенного ряда, даетъ *видъ* того степенного ряда, въ который разлагается функція $f(x)$, *если она на это способна*, и кромѣ того показываетъ, что функція $f(x)$, допускающая разложеніе въ степенной рядъ, разлагается *единственнымъ* образомъ. Условій возможности разложенія данной функціи въ степенной рядъ изъ предыдущихъ разсужденій вывести нельзя, такъ какъ ихъ исходной точкой служила *наличность* ряда (a).

Изъ формулы (*e*) слѣдуетъ, что

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}x^n+\frac{Mx^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)},\ldots (f)$$

гдѣ M, какъ сумма сходящагося въ интервалѣ $(-a, a)$ ряда, имѣетъ конечное значеніе для всѣхъ значеній x, заключенныхъ въ этомъ интервалѣ.

Поставимъ теперь слѣдующую задачу: дана функція $f(x)$, *непрерывная въ интервалѣ* $(-a, a)$ *и допускающая* $n+1$ *послѣдовательныхъ производныхъ; опредѣлить разность*

$$f(x)-\left[f(0)+\frac{f(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}x^n\right].$$

Обозначивъ эту разность черезъ $Mx^{n+1}/1.2\ldots n$, предположимъ, что M_0 есть значеніе M для $x=x_0$, гдѣ x_0 отлично отъ нуля и лежитъ въ интервалѣ $(-a, a)$. Пусть

$$F(x)=f(x)-f(0)-\frac{f'(0)}{1}x-\frac{f''(0)}{1.2}x^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(0)}{1.2..n}x^n-\frac{M_0x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

Вслѣдствіе предположеній, сдѣланныхъ относительно $f(x)$, функція $F(x)$ непрерывна въ интервалѣ $(-a, a)$ и допускаетъ $n+1$ послѣдовательныхъ производныхъ. Эти производныя выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$F'(x)=f'(x)-f'(0)-\frac{f''(0)}{1}x-\ldots-\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1}-\frac{M_0x^n}{1.2\ldots n};$$

$$F''(x)=f''(x)-f''(0)-\ldots-\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots(n-2)}x^{n-2}-\frac{M_0x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)};$$

. . . .

$$F^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)-\frac{M_0x}{1};$$

$$F^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-M_0.$$

Функція $F(x)$, непрерывная въ интервалѣ $(-a, a)$, непрерывна и въ интервалѣ $(0, x_0)$; для концовъ этого интервала она, какъ легко видѣть, обращается въ нуль; поэтому, по теоремѣ *Rolle*'я (§ 135), между 0 и x_0 существуетъ такое значеніе x_1 перемѣннаго x, при которомъ производная $F'(x)$ обращается въ нуль. Функція $F'(x)$ непрерывна въ интервалѣ $(0, x_1)$ и обращается въ нуль при $x=0$ и $x=x_1$; слѣд., ея производная $F''(x)$ обращается въ нуль при $x=x_2$, при чемъ x_2 лежитъ въ интервалѣ $(0, x_1)$.

Повторяя то же разсужденіе относительно функцій $F'''(x)$, $F^{(IV)}(x), \ldots, F^{(n)}(x)$, мы придемъ къ заключенію, что въ интервалѣ $(0, x_0)$ существуетъ такое число x_{n+1}, которое служитъ корнемъ функціи $F^{(n+1)}(x)$.

Поэтому $F^{(n+1)}(x_{n+1}) = f^{(n+1)}(x_{n+1}) - M_0 = 0$.

Замѣтивъ, что $x_{n+1} = \vartheta x_0$, гдѣ $0 < \vartheta < 1$, изъ послѣдняго равенства находимъ:

$$M_0 = f^{(n+1)}(\vartheta x_0).$$

Такъ какъ x_0 есть какое-нибудь значеніе x, отличное отъ нуля и лежащее въ интервалѣ $(-a, a)$, то предыдущее равенство можно переписать такъ:

$$M = f^{(n+1)}(\vartheta x),$$

при чемъ $0 < |x| < a$ и $0 < \vartheta < 1$.

Опредѣливъ M, можно представить функцію $f(x)$, удовлетворяющую перечисленнымъ выше требованіямъ, въ слѣдующемъ видѣ:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}x^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{1.2..(n+1)}x^{n+1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (116)$$

Эта формула называется *строкою* или *рядомъ Маклорена (Maclaurin)*. Послѣдній членъ ея второй части называется *дополнительнымъ членомъ* и обозначается обыкновенно черезъ R_{n+1}.

Формула (116) позволяетъ вычислять приближенныя значенія функціи $f(x)$, если извѣстны значенія самой функціи и ея производныхъ при $x = 0$, при чемъ вычисленія сводятся къ опредѣленію значенія цѣлаго многочлена n-ой степени, а оцѣнка величины дополнительнаго члена даетъ указаніе степени точности вычисленнаго приближеннаго значенія.

Положимъ, что функція $f(x)$ имѣетъ неограниченный рядъ производныхъ. Въ такомъ случаѣ при неограниченномъ возрастаніи n многочленъ

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}x^n$$

обращается въ безконечный рядъ, который въ своемъ интервалѣ сходимости представляетъ функцію, отличающуюся отъ $f(x)$ на

$\lim R_{n+1}$ при $n=\infty$, такъ какъ черезъ R_{n+1} была обозначена разность

$$f(x)-\left[f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}x^n\right].$$

Если окажется, что для всѣхъ значеній x, лежащихъ внутри интервала сходимости этого ряда, $\lim R_{n+1}=0$ при $n=\infty$, то полученный рядъ представитъ разложеніе функціи $f(x)$, такъ что въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто равенство:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+\ldots$$

Если же $\lim R_{n+1}\neq 0$ при $n=\infty$, то рядъ не представляетъ разложенія данной функціи $f(x)$, и послѣднее равенство не имѣетъ мѣста.

§ 179. **Другой выводъ строки Маклорена.** Пусть $f(x)$ есть функція, удовлетворяющая въ интервалѣ $(-a, a)$ условіямъ, указаннымъ въ предыдущемъ §. Разсмотримъ интегралъ

$$\int_0^x f'(x-t)\,dt,$$

разумѣя подъ x какое-нибудь число интервала $(-a, a)$, отличное отъ нуля.

Посредствомъ интегрированія по частямъ, находимъ:

$$\int_0^x f'(x-t)dt=\Big[tf'(x-t)\Big]_0^x+\int_0^x tf''(x-t)\,dt,$$

или

$$\int_0^x f'(x-t)dt=xf'(0)+\int_0^x tf''(x-t)dt.$$

Тѣмъ же пріемомъ интегрированія по частямъ легко получить слѣдующія равенства:

$$\int_0^x tf''(x-t)\,dt=\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{1}{1.2}\int_0^x t^2f'''(x-t)\,dt,$$

$$\frac{1}{1.2}\int_0^x t^2f'''(x-t)\,dt=\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\frac{1}{1.2.3}\int_0^x t^3f^{(IV)}(x-t)\,dt,$$

. . . .

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^x t^{n-1}f^{(n)}(x-t)\,dt = \frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0) +$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^x t^n f^{(n+1)}(x-t)\,dt.$$

Сложивъ почленно написанныя равенства и сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$\int_0^x f'(x-t)\,dt = xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0) +$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^x t^n f^{(n+1)}(x-t)\,dt.$$

Но разсматриваемый интегралъ можно вычислить иначе. Такъ какъ при x постоянномъ $d(x-t) = -dt$, то

$$\int_0^x f'(x-t)\,dt = -\int_0^x f'(x-t)\,d(x-t) = -\Big[f(x-t)\Big]_0^x = f(x) - f(0).$$

Сравнивая найденныя выраженія опредѣленнаго интеграла, получимъ равенство:

$$f(x) - f(0) = xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0) +$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^x t^n f^{(n+1)}(x-t)\,dt.$$

Отсюда находимъ:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0) +$$
$$+\frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^x t^n f^{(n+1)}(x-t)\,dt.$$

Это равенство есть не что иное, какъ строка *Маклорена* (см. форм. 116) съ дополнительнымъ членомъ въ видѣ опредѣленнаго интеграла.

Преобразуемъ выраженіе дополнительнаго члена, приложивъ къ интегралу, черезъ который оно выражается, теорему о *среднемъ значеніи* интеграла (§ 159, теор. 5).

Обозначивъ черезъ p число, удовлетворяющее условіямъ $1 \leqslant p \leqslant n+1$, можно представить дополнительный членъ строки *Маклорена* въ слѣдующемъ видѣ:

$$R_{n+1} = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^x t^{n-p+1} f^{(n+1)}(x-t) . t^{p-1} dt.$$

По указанной теоремѣ находимъ:

$$R_{n+1} = \frac{(\vartheta x)^{n-p+1} f^{(n+1)}(x-\vartheta x) . x^p}{1.2\ldots.n.p}, \; 0 < \vartheta < 1.$$

или, положивъ $1-\vartheta=\theta$,

$$R_{n+1} = \frac{(1-\theta)^{n-p+1} f^{(n+1)}(\theta x) . x^{n+1}}{1.2\ldots.n.p}; \; 0 < \theta < 1.$$

Это выраженіе дополнительнаго члена принадлежитъ *Шлемильху (Schlömilch)*. Изъ него при $p=n+1$ получается дополнительный членъ въ формѣ, указанной въ предыдущемъ § и данной *Лагранжемъ (Lagrange)*, а именно:

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x) . x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

При $p=1$ формула *Шлемильха* даетъ дополнительный членъ въ формѣ, указанной *Коши (Cauchy)*:

$$R_{n+1} = \frac{(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x) . x^{n+1}}{1.2\ldots.n}.$$

§ 180. **Разложеніе въ ряды** e^x, $\sin x$, $\cos x$. 1. Функція e^x непрерывна для всѣхъ значеній x (§ 123) и допускаетъ неограниченный рядъ производныхъ, которыя всѣ равны e^x (§ 130, примѣръ 3). Такъ какъ $e^x=1$ для $x=0$, то (§ 178)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2..n} + R_{n+1},$$

гдѣ

$$R_{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{1.2..(n+1)} x^{n+1}.$$

Безконечный рядъ

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

есть рядъ сходящiйся при всѣхъ значенiяхъ x (§ 173, примѣръ 1).

Дополнительный членъ R_{n+1} можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$R_{n+1} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdots \frac{x}{n+1} \cdot e^{\vartheta x},\ (0 < \vartheta < 1).$$

Множитель $e^{\vartheta x}$ имѣетъ конечное значенiе при всѣхъ значенiяхъ x, множители же вида x/k, гдѣ k есть натуральное число, можно разбить на двѣ группы, отнеся въ первую тѣ, которые больше 1, а во вторую тѣ, которые меньше 1 по абсолютному значенiю.

Число множителей первой группы для даннаго значенiя x конечно, а число множителей второй группы неограниченно возрастаетъ вмѣстѣ съ n и произведенiе ихъ стремится къ нулю. Поэтому

$$\lim_{n=\infty} R_{n+1} = 0.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ (§ 178), что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots\dots \quad (117)$$

При $x = 1$ рядъ (117) имѣетъ суммою число e (§ 104, прим. 3). Такъ какъ $a^x = e^{x log a}$, то изъ формулы (117) имѣемъ:

$$a^x = 1 + loga \cdot \frac{x}{1} + (loga)^2 \cdot \frac{x^2}{1.2} + \dots$$

2. Функцiя $sinx$ непрерывна для всѣхъ значенiй x и допускаетъ неограниченный рядъ производныхъ (§ 130, прим. 2). Изъ выраженiй производной n-аго порядка слѣдуетъ, что при $x = 0$ производныя *четнаго* порядка равны нулю, производныя порядка $4k + 1$ (k натуральное число или нуль) равны 1, а производныя порядка $4k + 3$ равны -1. Кромѣ того $sinx = 0$ при $x = 0$. Поэтому по формулѣ (116) имѣемъ:

$$sinx = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2\dots(2n+1)} + R_{2n+2},$$

гдѣ $R_{2n+2} = sin[\vartheta x + (n+1)\pi] \cdot \frac{x^{2n+2}}{1.2..(2n+2)},\ 0 < \vartheta < 1.$

Рядъ $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$

есть рядъ сходящійся при всѣхъ значеніяхъ x. Дѣйствительно, для сходимости его достаточно, чтобы

$$\lim_{n=\infty}\left|(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2..(2n+1)} : (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{1.2..(2n-1)}\right| < 1;$$

упростивъ первую часть этого неравэнства, находимъ:

$$x^2.\lim_{n=\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} < 1.$$

Но $\lim\limits_{n=\infty} 1/2n(2n+1)=0$. Слѣд., предыдущее неравенство удовлетворяется при всѣхъ значеніяхъ x, и разсматриваемый рядъ при всѣхъ значеніяхъ x сходящійся.

Дополнительный членъ R_{2n+2} стремится къ нулю при неограниченномъ возрастаніи n, въ чемъ легко убѣдиться способомъ, указаннымъ при разложеніи e^x.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ (§ 178), что

$$sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \quad (118)$$

3. Прилагая разсужденія, указанныя при разложеніи въ рядъ $sin x$, къ функціи $cos x$, получимъ слѣдующее разложеніе $cos x$:

$$cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \quad (119)$$

§ 181. **Приложеніе рядовъ (118) и (119) къ вычисленію** $sin x$ **и** $cos x$. Рядами (118) и (119) можно воспользоваться для вычисленія приближенныхъ значеній $sin x$ и $cos x$ съ любою степенью точности. Вопросъ о вычисленіи значеній тригонометрическихъ функцій произвольной дуги сводится, какъ извѣстно изъ тригонометріи, къ вычисленію значеній тригонометрическихъ функцій *положительныхъ* дугъ *меньшихъ* $\frac{\pi}{4}$. Поэтому при вычисленіи синуса или косинуса можно считать аргументъ x положительнымъ и меньшимъ $\frac{\pi}{4}$.

Такъ какъ разложенія (118) и (119) для значенія x въ интервалѣ $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ представляютъ знакочередующіеся ряды съ убывающими членами, то абсолютное значеніе разности между значе-

ніемъ $\sin x$ или $\cos x$ и суммою n первыхъ членовъ соотвѣтственнаго ряда меньше абсолютной величины $(n+1)$-аго члена этого ряда (§ 169).

Это даетъ возможность судить о степени точности тѣхъ приближенныхъ значеній синуса или косинуса, которыя даются суммами n членовъ соотвѣтственныхъ рядовъ.

Взявъ, напримѣръ, суммы

$$x-\frac{x^3}{6} \text{ и } 1-\frac{x^2}{2},$$

мы получимъ приближенныя значенія $\sin x$ и $\cos x$ съ *недостаткомъ* и погрѣшностями, меньшими соотвѣтственно чиселъ:

$$\frac{x^5}{1.2.3.4.5}<\frac{\pi^5}{4^5.1.2.3.4.5}<\frac{1}{120}<0{,}01;$$
$$\frac{x^4}{1.2.3.4}<\frac{\pi^4}{4^4.1.2.3.4}<\frac{1}{24}<0{,}1.$$

§ 182. **Связь между показательной функціей и тригонометрическими.** Разложеніе (117) было выведено въ предположеніи, что x есть *дѣйствительное* перемѣнное. Но вторая часть формулы (117) представляетъ сходящійся рядъ и въ томъ случаѣ, когда x есть *комплексное* перемѣнное (§ 172). Этотъ рядъ принимается за *опредѣленіе* показательной функціи въ случаѣ комплекснаго перемѣннаго. Замѣнивъ въ формулѣ (117) x черезъ xi, гдѣ x есть дѣйствительное число, а $i=\sqrt{-1}$, получимъ:

$$e^{xi}=1+\frac{xi}{1}+\frac{(xi)^2}{1.2}+\ldots+\frac{(xi)^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

или, отдѣливъ дѣйствительныя и мнимыя части,

$$e^{xi}=\left(1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots\right)+i\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\right).$$

Отсюда по формуламъ (118) и (119) находимъ:

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

Эта формула указываетъ связь между показательной функціей и тригонометрическими и принадлежитъ *Эйлеру (Euler)*.

Посредствомъ ея легко обнаружить *періодичность* показательной функціи. Въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ въ ней x черезъ $x+2\pi$, находимъ равенство

$$e^{(x+2\pi)i}=\cos(x+2\pi)+i\sin(x+2\pi)=\cos x+i\sin x=e^{xi},$$

показывающее, что прибавленіе къ аргументу показательной функціи числа $2\pi i$ не измѣняетъ ея значенія. Слѣд., e^x *есть періодическая функція съ мнимымъ періодомъ* $2\pi i$.

Изъ соотношенія (120) легко получить слѣдующія формулы:

1) $e^{\frac{\pi}{2}i}=i;\ e^{\pi i}=-1;\ e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i,\ e^{2\pi i}=1;$

2) $\rho(cos\varphi+isin\varphi)=\rho\, e^{\varphi i};$

3) $cosx=\dfrac{e^{xi}+e^{-xi}}{2};\ sinx=\dfrac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}.$

§ 183. **Разложеніе въ рядъ логариѳма.** Функція $logx$ непрерывна при всѣхъ значеніяхъ x за исключеніемъ $x=0$ (§ 124). Нарушеніе ея непрерывности при $x=0$ дѣлаетъ невозможнымъ приложеніе къ ней формулы (116).

Функція $log(1+x)$ непрерывна внутри интервала $(-1,1)$ и допускаетъ неограниченный рядъ производныхъ въ этомъ интервалѣ. Поэтому она допускаетъ разложеніе по строкѣ Маклорена (§ 178).

Вычисляя значенія функціи и ея производныхъ при $x=0$, находимъ:

$$f(x)=log(1+x);\ f(0)=log1=0.$$

$$f'(x)=\frac{dlog(1+x)}{d(1+x)}\cdot\frac{d(1+x)}{dx}=\frac{1}{1+x};\ f'(0)=1;$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2};\ f''(0)=-1;$$

$$f'''(x)=+\frac{1.2}{(1+x)^3};\ f'''(0)=1.2;$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{1.2..(n-1)}{(1+x)^n};\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}1.2..(n-1).$$

Подставивъ найденныя значенія коэффиціентовъ въ рядъ Маклорена, получимъ разложеніе $log(1+x)$:

$$log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-..+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}....$$

Безконечный рядъ

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

есть рядъ сходящійся, если $-1<x\leqslant 1$ (§ 173, прим. 2).

Чтобы узнать, представляетъ ли онъ разложеніе $log(1+x)$, обратимся къ изслѣдованію дополнительнаго члена R_{n+1}.

Для положительныхъ значеній x, лежащихъ въ интервалѣ $(-1,1)$, удобно представить R_{n+1} въ формѣ Лагранжа (§ 180):

$$R_{n+1}=\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}=(-1)^n\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\left[\frac{x}{1+\theta x}\right]^{n+1},\ (0<\theta<1).$$

Такъ какъ $lim\,[1/(n+1)]=0$ при $n=\infty$ и кромѣ того при $x>0$

$$\frac{x}{1+\theta x}<1,\ \lim_{n=\infty}\left[\frac{x}{1+\theta x}\right]^{n+1}=0,$$

то для $0<x\leqslant 1$

$$\lim_{n=\infty} R_{n+1}=0.$$

Для отрицательныхъ значеній x, т.-е. для x, заключенныхъ между -1 и 0, возьмемъ дополнительный членъ въ формѣ Коши (§ 180):

$$R_{n+1}=\frac{(1-\theta)^n.(-1)^n.x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},\ (0<\theta<1).$$

Полагая въ этомъ выраженіи $x=-z$, получимъ:

$$R_{n+1}=\frac{(1-\theta)^n.(-1)^n.(-1)^{n+1}.z^{n+1}}{(1-\theta z)^{n+1}}=\frac{-z}{1-\theta z}\cdot\left[\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right]^n.$$

Такъ какъ при $-1<x<0$ перемѣнное z заключается между 0 и 1, то

$$\frac{z-\theta z}{1-\theta z}<1 \text{ и } \lim_{n=\infty}\left[\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right]^n=0.$$

Поэтому и для отрицательныхъ значеній x, лежащихъ въ интервалѣ сходимости разсматриваемаго ряда,

$$\lim_{n=\infty} R_{n+1}=0.$$

Отсюда заключаемъ, что $log(1+x)$ въ интервалѣ $(-1,1)$ разлагается въ слѣдующій безконечный рядъ:

$$log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots \quad (121)$$

§ 184. **Вычисленіе логариѳмовъ.** Рядомъ (121) можно воспользоваться для вывода другого ряда, *удобнаго для вычисленія логариѳмовъ*.

По формулѣ (121) при $|x|<1$ имѣемъ

$$log(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots;$$

вычитая этотъ рядъ изъ ряда (121), получимъ:

$$log(1+x)-log(1-x)=log\frac{1+x}{1-x}=2\left\{\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right\}.$$

Этимъ рядомъ удобно пользоваться при вычисленіи логариѳмовъ цѣлыхъ чиселъ. Пусть N есть цѣлое положительное число. Полагая

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+1}{N},$$

находимъ $x=1/(2N+1)$. Подставивъ это значеніе x въ послѣдній рядъ, получимъ:

$$log(N+1)-log\,N=2\left\{\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2N+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2N+1)^5}+\ldots\right\}\ldots(\alpha)$$

При $N=1$ эта формула даетъ $log2$:

$$log2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3.3^3}+\frac{2}{5.3^5}+\ldots$$

Вычисляя сумму 5 членовъ этого ряда, мы получимъ значеніе $log2$ съ точностью до 10^{-5}. Дѣйствительно, сумма

$$\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\ldots$$

отбрасываемыхъ членовъ меньше суммы геометрической прогрессіи

$$\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\ldots;$$

а эта сумма равна $1/4.11.3^9$ и меньше 0,00001.

Выполняя вычисленія, находимъ:

$$\frac{2}{3}=0{,}666\ 666\ 7$$

$$\frac{2}{3.3^3}=0{,}024\ 691\ 4$$

$$\frac{2}{5.3^5}=0{,}001\ 646\ 1$$

$$\frac{2}{7.3^7}=0{,}001\ 130\ 6$$

$$\frac{2}{9.3^9}=0{,}000\ 011\ 3$$

$$\text{Сумма}=0{,}693\ 146\ 1$$

Такимъ образомъ для $log2$ получаемъ 0,69314 съ погрѣшностью меньше 0,00001 или 0,69315 съ погрѣшностью меньше *половины* 0,00001.

Полагая въ формулѣ (α) $N=2,3,\ldots$ можно вычислить логариѳмы 3,4,... При этомъ самыя вычисленія дѣлаются быстрѣе, такъ какъ убываніе членовъ ряда (α) съ возрастаніемъ N идетъ все быстрѣе и быстрѣе.

Зная логариѳмы чиселъ при основаніи e *(неперовы)*, легко найти ихъ логариѳмы при основаніи 10 *(десятичные* или *обыкновенные)*.

Для этого достаточно неперовъ логариѳмъ числа умножить на $1/log10$ (§ 180, разлож. a^x); этотъ множитель называется *модулемъ* системы десятичныхъ логариѳмовъ относительно системы неперовыхъ логариѳмовъ.

Обозначимъ его черезъ M. Для вычисленія M замѣтимъ, что

$$\frac{1}{M}=log10=log5+log2;$$

$log2$ извѣстенъ; чтобы найти $log5$, положимъ $N=4$ въ формулѣ (α); получимъ:

$$log5-log4=\frac{2}{9}+\frac{2}{3.9^3}+\frac{2}{5.9^5}+\ldots;$$

или

$$log5=2log2+\left\{\frac{2}{9}+\frac{2}{3.9^3}+\frac{2}{5.9^5}+\ldots\right\}.$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ равенства по $log2$, находимъ:

$$\frac{1}{M}=log10=3log2+\left\{\frac{2}{9}+\frac{2}{3.9^3}+\frac{2}{5.9^5}+..\right\}.$$

Вычисленія приводятъ къ слѣдующему результату: $M=0,43429$ съ точностью до 10^{-5}.

§ 185. **Разложеніе въ рядъ** $(1+x)^m$. Пусть $f(x)=(1+x)^m$. Найдемъ значенія этой функціи и ея производныхъ при $x=0$.

$f(x)=(1+x)^m$; $f(0)=1$;
$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$; $f'(0)=m$;
$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$; $f''(0)=m(m-1)$;

. . . .

$f^{(n)}(x)=m(m-1)..(m-n+1)(1+x)^{m-n}$; $f^{(n)}(0)=m(m-1)..(m-n+1)$.

Подставляя эти значенія въ формулу (116), находимъ:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+..+\frac{m(m-1)..(m-n+1)}{1.2...n}x^n+R_{n+1}.$$

Разсмотримъ рядъ:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{1.2....n}x^n+.... \quad (\alpha)$$

Если m есть натуральное число, то коэффиціенты всѣхъ членовъ его, начиная съ $(m+2)$-го, какъ содержащіе множитель $m-m$, равный нулю, обращаются въ нуль, и мы получаемъ многочленъ

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+..+\frac{m(m-1)...2.1}{1.2....m}x^m,$$

представляющій разложеніе $(1+x)^m$ по степенямъ x *(формула бинома Ньютона).*

Если m не есть натуральное число, то рядъ (α) безконеченъ. Опредѣлимъ его интервалъ сходимости и для этого составимъ отношеніе общаго члена къ предыдущему:

$$\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{1.2...n}x^n:\frac{m(m-1)...(m-n+2)}{1.2...(n-1)}x^{n-1}=$$

$$=\frac{m-n+1}{n}x=\left(\frac{m+1}{n}-1\right)x.$$

Для сходимости ряда (α) достаточно (§ 173), чтобы удовлетворялось неравенство:

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{m+1}{n}-1\right|.|x|<1.$$

Такъ какъ $lim\left|\frac{m+1}{n}-1\right|=1$ при неограниченномъ возрастаніи n, то это неравенство удовлетворяется при $|x|<1$. Слѣд., рядъ (α) сходящійся для значеній x, заключенныхъ въ интервалѣ $(-1, 1)$.

Чтобы рѣшить вопросъ о томъ, представляетъ ли рядъ (α) разложеніе $(1+x)^m$, разсмотримъ дополнительный членъ R_{n+1}, взявъ его въ формѣ Коши (§ 180):

$$R_{n+1}=\frac{(1-\theta)^n m(m-1)\ldots(m-n)\,(1+\theta x)^{n-n-1}x^{n+1}}{1.2\ldots.n},\ 0<\theta<1.$$

Представимъ R_{n+1} въ видѣ произведенія трехъ множителей:

$$R_{n+1}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)x^{n+1}}{1.2\ldots.n}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot(1+\theta x)^{m-1}.$$

Не трудно убѣдиться, что рядъ, общимъ членомъ котораго служитъ первый изъ этихъ трехъ множителей, т.-е.

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots n}\,x^{n+1},$$

есть рядъ сходящійся въ интервалѣ $(-1,1)$. Изъ этого слѣдуетъ, что при безграничномъ возрастаніи n этотъ множитель стремится къ нулю (§ 166).

Такъ какъ $0<\theta<1$ и рядъ разсматривается для интервала $(-1,1)$, то $-1<x<1$ и $1-\theta<1+\theta x$. Поэтому

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1,\ \lim_{n=\infty}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n=0,$$

т.-е. второй множитель дополнительнаго члена R_{n+1} стремится къ нулю при безгранично возрастающемъ n.

Наконецъ, третій множитель, т.-е. $(1+\theta x)^{m-1}$, есть конечное число при $|x|<1$ и $0<\theta<1$.

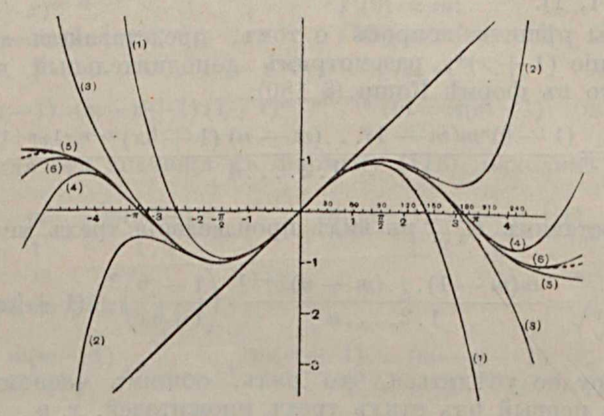
Изъ этого слѣдуетъ, что $lim\ R_{n+1}=0$ при $n=\infty$.

Рядъ (α) представляетъ (§ 179) разложеніе $(1+x)^m$ въ интервалѣ $(-1,1)$:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots \quad (122)$$

Рядъ (122) называется *биномiальнымъ*.

§ 186. **Геометрическія иллюстраціи.** Уравненіе $y=f(x)$, въ которомъ x и y обозначаютъ координаты точки на плоскости, опредѣляетъ, какъ извѣстно (§ 18), кривую. Разложивъ $f(x)$ въ



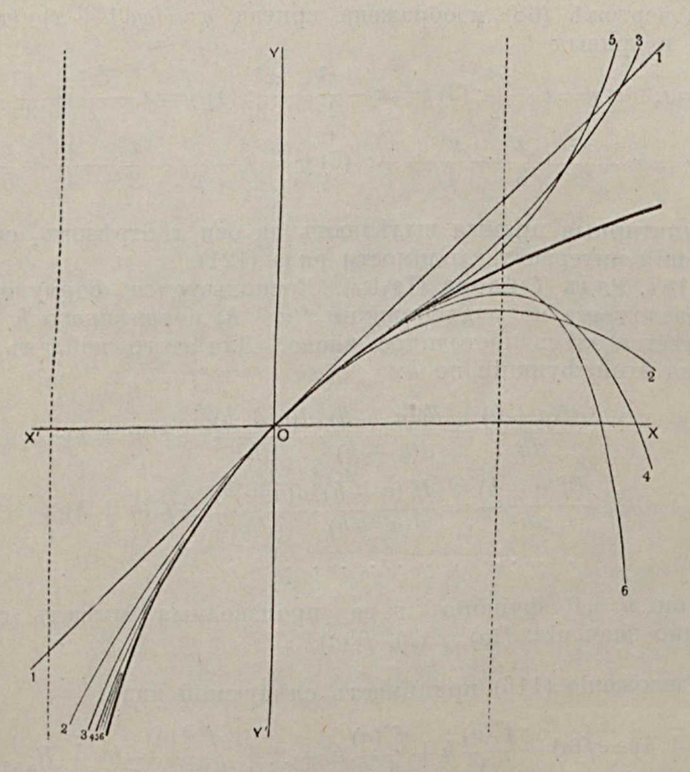
Черт. 67.

рядъ по формулѣ (116) и обозначивъ сумму первыхъ $n+1$ членовъ его черезъ y, мы получимъ уравненіе

$$y = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}x^n,$$

опредѣляющее на плоскости *параболу n-аго порядка*. При данномъ значеніи x ординаты этой параболы представляютъ приближенныя значенія функціи $f(x)$. Вычерчивая эти кривыя для $n=0$, 1, 2,... и сравнивая для одной и той же абсциссы ихъ ординаты съ ординатами кривой $y=f(x)$, можно наглядно представить приближеніе суммы $n+1$ первыхъ членовъ разложенія $f(x)$ къ значенію этой функціи, если абсцисса взята въ интервалѣ сходимости ряда, и удаленіе ея отъ значенія $f(x)$ внѣ этого интервала*).

*) Указанныя въ этомъ § параболы называются *соприкасающимися* съ кривой $y=f(x)$ въ точкѣ $x=0$, $y=f(0)$; число n называется *порядкомъ прикосновенія*.



Черт. 68.

На чертежѣ (67) изображена (см. форм. 118) *синусоида* $y=sin x$, прямая линія $y=x$ и параболы:

$$(1)\ y=x-\frac{x^3}{3!};\ (2)\ y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!};\ (3)\ y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!};$$

$$(4)\ y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!};\ (5)\ y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!};$$

$$(6)\ y=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{13}}{13!}.$$

(Синусоида вычерчена пунктирной линіей, а прямая и параболы—сплошными, при чемъ параболы перенумерованы).

На чертежѣ (68) изображена кривая $y = log(1+x)$ (толстая линія) и кривыя

(1) $y=x$; (2) $y=x-\frac{x^2}{2}$; (3) $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$; (4) $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$;

(5) $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$; (6) $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}$.

Пунктирныя прямыя выдѣляютъ на оси x отрѣзокъ, соотвѣтствующій интервалу сходимости ряда (121).

§ 187. **Рядъ Тэйлора (Taylor).** Воспользуемся формулой (116) для разложенія въ рядъ функціи $f(a+h)$ перемѣннаго h; подъ a разумѣется здѣсь постоянное число. Для этого найдемъ производныя этой функціи по h:

$$\frac{df(a+h)}{dh}=\frac{df(a+h)}{d(a+h)}\cdot\frac{d(a+h)}{dh}=f'(a+h);$$

$$\frac{d^2f(a+h)}{dh^2}=\frac{df'(a+h)}{d(a+h)}\cdot\frac{d(a+h)}{dh}=f''(a+h);$$

. . . .

При $h=0$ функція и ея производныя имѣютъ соотвѣтственно значенія: $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$,...

Разложеніе (116) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}h+\frac{f''(a)}{1.2}h^2+..+\frac{f^{(n)}(a)}{1.2...n}h^n+R_{n+1}.. \quad (123)$$

Эта формула извѣстна подъ именемъ *строки* или *ряда Тэйлора.* Она даетъ возможность разлагать функцію по возрастающимъ степенямъ *приращенія* перемѣннаго, когда это послѣднее измѣняется отъ нѣкотораго опредѣленнаго значенія a. R_{n+1} есть дополнительный членъ строки Тэйлора. Соотвѣтственно тремъ формамъ дополнительнаго члена строки Маклорена, указаннымъ въ § 179, мы имѣемъ три слѣдующія формы дополнительнаго члена строки Тэйлора:

$$R_{n+1}=\frac{(1-\theta)^{n-p+1}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}}{1.2....n.p} \quad \textit{(Шлемильхъ)},$$

$$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}}{1.2...(n+1)} \quad \textit{(Лагранжъ)},$$

$$R_{n+1}=\frac{(1-\theta)^n f^{(n)}(a+\theta h)h^{n+1}}{1.2...n} \quad \textit{(Коши)};$$

во всѣхъ этихъ формулахъ θ обозначаетъ число, заключенное между 0 и 1, но не одно и то же во всѣхъ трехъ формулахъ.

Условія возможности разложенія функціи $f(x)$ въ рядъ Тэйлора получаются изъ условій, указанныхъ въ § 179. Если, какъ это требуется для формулы (116), функція $f(a+h)$ перемѣннаго h непрерывна и допускаетъ рядъ послѣдовательныхъ производныхъ до $(n+1)$-аго порядка включительно для значеній h въ интервалѣ $(-\alpha, \alpha)$, то функція $f(x)$ перемѣннаго x обладаетъ тѣми же свойствами въ интервалѣ $(a-\alpha, a+\alpha)$.

Наличность этихъ свойствъ функціи $f(x)$ является условіемъ возможности ея разложенія по формулѣ (123).

Если $f(x)$ допускаетъ неограниченный рядъ производныхъ и дополнительный членъ R_{n+1} стремится къ нулю при неограниченномъ возрастаніи n, то формула (123) даетъ разложеніе $f(a+h)$ въ *безконечный* рядъ.

Рядъ Маклорена даетъ возможность изучать измѣненія функціи при значеніяхъ перемѣннаго, смежныхъ съ *нулемъ*, а рядъ Тэйлора—при значеніяхъ перемѣннаго, смежныхъ съ a.

§ 188. **Рядъ Тэйлора для функціи двухъ перемѣнныхъ.** Распространимъ рядъ (123) на функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ. Пусть $f(x, y)$ есть функція двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, непрерывная въ извѣстныхъ интервалахъ относительно каждаго изъ нихъ и допускающая частныя производныя до $(n+1)$-го порядка включительно. Задача заключается въ томъ, чтобы разложить функцію $f(x+h, y+k)$ въ рядъ по степенямъ приращеній h и k.

Положивъ

$$\xi = x + ht,\ \eta = y + kt,$$

будемъ разсматривать функцію $f(\xi, \eta)$, какъ функцію $\varphi(t)$ перемѣннаго t, считая x, y, h и k постоянными. Къ функціи $\varphi(t)$ одного перемѣннаго приложимъ формулу (116); получимъ:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1} t + \frac{\varphi''(0)}{1.2} t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1.2..n} t^n +$$
$$+ \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{1.2\ldots(n+1)} t^{n+1};\ 0 < \theta < 1 \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

Вычислимъ коэффиціенты этого ряда. Для этого напишемъ сначала производныя функціи $\varphi(t)$ (см. § 139):

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} f(\xi, \eta) = \frac{\partial f(\xi,\ \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial f(\xi,\ \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial f(\xi,\ \eta)}{\partial \xi} h + \frac{\partial f(\xi,\ \eta)}{\partial \eta} k;$$

$$\varphi''(t)=\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}hk+\frac{\partial^2 f(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}k^2;$$

$$\varphi'''(t)=\frac{\partial^3 f(\xi,\eta)}{\partial\xi^3}h^3+3\frac{\partial^3 f(\xi,\eta)}{\partial\xi^2\partial\eta}h^2k+3\frac{\partial^3 f(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta^2}hk^2+\frac{\partial^3 f(\xi,\eta)}{\partial\eta^3}k^3;$$

. . . .

Разсматривая выраженія $\varphi''(t)$ и $\varphi'''(t)$, легко замѣтить ихъ аналогію съ извѣстными разложеніями квадрата и куба суммы двухъ чиселъ. Пользуясь этой аналогіей, можно представить $\varphi''(t)$ и $\varphi'''(t)$ слѣдующими символическими формулами:

$$\varphi''(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial\xi}+k\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2 f(\xi,\ \eta);\ \varphi'''(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial\xi}+k\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^3 f(\xi,\ \eta),$$

при употребленіи которыхъ слѣдуетъ помнить, что послѣ возведенія въ квадратъ или кубъ символическаго двучлена слѣдуетъ къ символамъ приписать отдѣленный отъ нихъ аргументъ $f(\xi,\ \eta)$.

Для производной $\varphi^{(n)}(t)$ указаннымъ путемъ получимъ слѣдующее символическое выраженіе:

$$\varphi^{(n)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial\xi}+k\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^n f(\xi,\ \eta).$$

Обращаясь теперь къ значеніямъ функціи $\varphi(t)$ и ея производныхъ при $t=0$, замѣтимъ, что при $t=0$ перемѣнныя ξ и η обращаются соотвѣтственно въ x и y, а такъ какъ въ функцію $f(\xi,\ \eta)$ перемѣнныя ξ и η входятъ совершенно такъ же, какъ x и y въ функцію $f(x,\ y)$, то $\varphi(0)=f(x,\ y)$; $\varphi^{(n)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,\ y)$.

Разложеніе (α) принимаетъ видъ:

$$\varphi(t)=f(x,y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y).\ \frac{t}{1}+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)\frac{t}{1.2}+\ldots$$

Полагая въ этомъ разложеніи $t=1$ и принимая во вниманіе, что

$$\varphi(1)=f(x+h,\ y+k),$$

находимъ:

$$f(x+h, y+k)=f(x, y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)+\frac{1}{1.2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)+R_{n+1}, \quad . \ . \ . \ . \ (124)$$

гдѣ R_{n+1} представляетъ результатъ подстановки $x+\vartheta h$, $y+\vartheta_1 k$ вмѣсто x и y въ выраженіе

$$\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x, y),$$

при чемъ $0<\vartheta<1$, $0<\vartheta_1<1$.

Формула (124) представляетъ рядъ Тэйлора для функціи двухъ перемѣнныхъ.

Указаннымъ способомъ можно распространить рядъ Тэйлора и на функціи съ большимъ числомъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Упражненія.

1. *Доказать сходимость рядовъ:*

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1.2}{3.4}+\frac{1.2.3}{4.5.6}+\ldots+\frac{1.2.3\ldots n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}+\ldots$;

b) $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\ldots+\frac{n^4}{n!}+\ldots$;

c) $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$, *гдѣ* $p>1$.

2. *Доказать расходимость ряда, общій членъ котораго есть* $(n+1)/(n^2+1)$.

3. *Найти условія сходимости рядовъ:*

a) $1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^3}{6}-\ldots$;

b) $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots$;

c) $\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\ldots$;

d) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$

Отв. a) $|x|\leq 1$; *b)* $|x|<1$; *c)* $|x|\leq 1$; *d)* $|x|<1$.

4. *Зная, что для* $|x|<1$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots,$$

найти разложеніе $(1-x)^{-2}$.

5. *Зная, что для* $x^2 < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots,$$

найти разложеніе $\operatorname{arctan} x$.

6. *Разложить въ рядъ* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. *Разложить въ рядъ* $\arcsin x$.

(*Отв. см. упр.* 3, *b*).

8. *Разложить въ рядъ* $(1+x)^{-1}$, *построить графикъ этой функціи и сравнить его съ параболами:*

$$y = 1 - x + x^2;\ y = 1 - x + x^2 - x^3;\ y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

9. *Вычертить графикъ* $\cos x$ *и сравнить его съ параболами:*

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!};\ y = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^4}{4!};\ y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

10. *При помощи ряда (112) найти* $\sqrt[3]{126}$ *съ точностью до 5-го десятичнаго знака.*

Отв. 5,01329.

ГЛАВА XVIII.

Нѣкоторыя приложенія теоріи рядовъ. Неопредѣленныя выраженія. Maxima и minima функцій. Способъ Ньютона для приближеннаго вычисленія корней алгебраическаго уравненія. Интегрированіе при помощи безконечныхъ рядовъ.

§ 189. **Неопредѣленныя выраженія.** *Неопредѣленными* называются выраженія слѣдующихъ видовъ:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^{\infty}.$$

Полученіе одной изъ этихъ формъ при вычисленіи значенія функціи $\varphi(x)$ для $x = a$ показываетъ *только* то, что *функція не вполнѣ опредѣлена*. Но если поставлено требованіе, чтобы функція $\varphi(x)$ была *непрерывна* при $x = a$ (§ 16), то появленіе неопредѣленнаго выраженія въ качествѣ ея значенія при $x = a$ показываетъ, что нужно обратиться къ изысканію ея *предѣльнаго* значенія, когда x стремится къ a (§ 103).

Пріемы рѣшенія этой задачи весьма разнообразны *). Въ слѣдующемъ § изложенъ пріемъ, извѣстный подъ названіемъ «*правила l'Hospital'я*» и примѣнимый во многихъ случаяхъ.

§ 190. **Неопредѣленныя выраженія вида** $\frac{0}{0}$. Пусть имѣемъ дробь $f(x) / F(x)$, числитель и знаменатель которой обращаются въ *нуль* при $x=a$. Требуется найти $\lim f(x)/F(x)$ при $x=a$.

Полагая $x=a+h$ и предполагая возможность разложенія функцій $f(x)$ и $F(x)$ въ рядъ Тэйлора (§ 187), находимъ:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots}{F(a)+hF'(a)+\frac{h^2}{1.2}F''(a)+\ldots}.$$

Такъ какъ по предположенію $f(a)=0$, $F(a)=0$, то правую часть написаннаго тождества можно сократить на h, послѣ чего получимъ:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a)+\frac{h}{1.2}f''(a)+\ldots}{F'(a)+\frac{h}{1.2}F''(a)+\ldots}$$

Отсюда черезъ переходъ къ предѣлу при $h=0$, находимъ:

$$\lim_{h=0}\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a)}{F'(a)},$$

т.-е. *предѣльное при* $x=a$ *значеніе отношенія* $f(x)/F(x)$ *двухъ функцій, обращающихся въ нуль при* $x=a$, *равно отношенію значеній производныхъ этихъ функцій при* $x=a$. Въ этомъ и состоитъ „*правило l'Hospital'я*“.

Если одно изъ чиселъ $f'(a)$ и $F'(a)$ отлично отъ нуля, то послѣднее равенство рѣшаетъ задачу; если же $f'(a)=0$ и $F'(a)=0$, то отношеніе первыхъ производныхъ нужно замѣнить отношеніемъ $f''(a)/F''(a)$ вторыхъ производныхъ и т. д.

Примѣръ 1. Дробь

$$\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

*) См. § 104 и гл. X настоящаго курса.

при $x=1$ даетъ неопредѣленное выраженіе вида $\frac{0}{0}$. Найти ея предѣльное значеніе при $x=1$. Примѣняя правило *l'Hospital*'я, находимъ:

$$\lim_{x=1} \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} = \lim_{x=1} \frac{1-(n+1)^2x^n+n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)}.$$

Числитель и знаменатель дроби, стоящей во второй части этого равенства, обращаются въ нули при $x=1$. Поэтому снова примѣняемъ правило *l'Hospital*'я:

$$\lim_{x=1} \frac{1-(n+1)^2x^n+n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)} = \lim_{x=1} \frac{-n(n+1)^2x^{n-1}+n(n+1)(n+2)x^n}{2}.$$

Правая часть этого равенства равна $n(n+1)/2$. Слѣд.,

$$\lim_{x=1} \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Примѣръ 2. $\lim_{x=0} \frac{x^2}{1-cosmx} = \lim_{x=0} \frac{2x}{msinmx} = \frac{2}{m^2}$.

Къ тому же результату можно придти и другимъ путемъ. Разлагая *cosmx* въ рядъ (форм. 119), находимъ:

$$1-cosmx = 1-\left(1-\frac{m^2x^2}{1.2}+\frac{m^4x^4}{1.2.3.4}-\ldots\right) = \frac{m^2x^2}{1.2}\left(1-\frac{m^2x^2}{3.4}+\ldots\right).$$

Поэтому

$$\lim_{x=0} \frac{x^2}{1-cosmx} = \lim_{x=0} \frac{x^2}{\frac{m^2x^2}{2}\left(1-\frac{m^2x^2}{3.4}+\ldots\right)} = \frac{2}{m^2}.$$

§ 191. **Неопредѣленныя выраженія вида $\frac{\infty}{\infty}$.** Если числитель и знаменатель дроби $f(x)/F(x)$ обращаются въ ∞ при $x=a$, то значеніе дроби представляется неопредѣленнымъ выраженіемъ $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы найти предѣльное значеніе этой дроби при $x=a$, замѣтимъ, что можно преобразовать данную дробь слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Числитель и знаменатель послѣдней дроби обращаются въ нуль при $x=a$. Примѣняя правило *l'Hospital'я*, находимъ:

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x=a}\left\{\frac{F'(x)}{[F(x)]^2}:\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\right\}=\lim_{x=0}\frac{F'(x)}{f'(x)}\cdot\left[\lim_{x=a}\frac{f(x)}{F(x)}\right]^2$$

Если искомое предѣльное значеніе есть число конечное, то изъ предыдущаго равенства черезъ сокращеніе на искомый предѣлъ находимъ:

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

т.-е. получаемъ снова правило *l'Hospital'я*.

Если предѣльное значеніе дроби $f(x)/F(x)$ есть нуль, то указаннаго выше сокращенія сдѣлать нельзя; нельзя, слѣд., сдѣлать и слѣдующаго за нимъ вывода. Замѣнимъ въ этомъ случаѣ данную дробь $f(x)/F(x)$, предѣльное значеніе которой при $x=a$, по предположенію, равно нулю, дробью $[f(x)+AF(x)]/F(x)$, полученной черезъ прибавленіе къ данной дроби произвольнаго, неравнаго нулю числа A.

При $x=a$ эта дробь обращается въ неопредѣленное выраженіе $\frac{\infty}{\infty}$, но предѣльное значеніе ея, какъ нетрудно видѣть, равно A. Поэтому къ ней можно приложить правило *l'Hospital'я*. Сдѣлавъ это, находимъ:

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)+AF(x)}{F(x)}=\lim_{x=a}\frac{f'(x)+AF'(x)}{F'(x)}=\lim_{x=a}\left[\frac{f'(x)}{F'(x)}+A\right].$$

Отсюда находимъ, что и въ этомъ случаѣ

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Наконецъ, когда предѣльное значеніе дроби $f(x)/F(x)$ равно ∞, то, замѣтивъ, что въ этомъ случаѣ $\lim F(x)/f(x)=0$, по предыдущему имѣемъ:

$$\lim_{x=a}\frac{F(x)}{f(x)}=\lim_{x=a}\frac{F'(x)}{f'(x)};$$

отсюда получимъ прежнее соотношеніе:

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x=a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Примѣръ. Дробь $cot2x/cotx$ при $x=0$ даетъ неопредѣленное выраженіе $\frac{\infty}{\infty}$. Поступая по правилу *l'Hospital'я*, находимъ:

$$\lim_{x=0}\frac{cot2x}{cotx}=\lim\left\{-\frac{2}{sin^2 2x}\bigg/-\frac{1}{sin^2 x}\right\}=2\lim_{x=0}\left[\frac{sinx}{sin2x}\right]^2=\frac{1}{2}.$$

§ 192. **Неопредѣленныя выраженія видовъ** $\infty-\infty$, $0.\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Неопредѣленныя выраженія указанныхъ въ заглавіи § пяти видовъ приводятся къ разсмотрѣннымъ выше видамъ: $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

a) Функцію $\varphi(x)$, доставляющую при $x=a$ выраженіе $\infty-\infty$, можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$\varphi(x)=\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{F(x)}=\frac{F(x)-f(x)}{f(x)\,.\,F(x)},$$

при чемъ $f(a)=0$, $F(a)=0$. Послѣдняя дробь при $x=a$ даетъ выраженіе вида $\frac{0}{0}$.

b) Функцію $\varphi(x)$, доставляющую при $x=a$ выраженіе вида $0.\infty$, можно представить въ видѣ дроби $f(x)/F(x)$, въ которой $f(x)$ и $F(x)$ при $x=a$ обращаются либо обѣ въ нуль, либо обѣ въ ∞.

c) Функцію $\varphi(x)$, доставляющую при $x=a$ одно изъ выраженій 0^0, ∞^0, 1^∞, можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$\varphi(x)=[F(x)]^{f(x)},$$

при чемъ для перваго случая $F(a)=0$, $f(a)=0$; для второго $F(a)=\infty$, $f(a)=0$; для третьяго $F(a)=1$, $f(a)=\infty$.

Взявъ логариѳмъ $\varphi(x)$, найдемъ:

$$log\varphi(x)=f(x)\,.\,logF(x).$$

Во всѣхъ трехъ случаяхъ значеніе $log\varphi(x)$ при $x=a$ даетъ неопредѣленное выраженіе вида $0\,.\,\infty$, которое, по предыдущему, приводится къ виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Примѣръ 1. $\lim\limits_{x=1}(1-x)tan\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x=1}\frac{(1-x)\,sin\frac{\pi x}{2}}{cos\frac{\pi x}{2}}=$

$$=\lim_{x=1} sin\frac{\pi x}{2}\cdot\lim_{x=1}\frac{1-x}{cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x=1}\frac{1-x}{cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

2. Функція x^x при $x=0$ принимаетъ значеніе 0^0. Найдемъ предѣльное значеніе логариѳма этой функціи при $x=0$:

$$log x^x = x log x;$$

$$\lim_{x=1}\,[x log x]=\lim_{x=0}\frac{log x}{1/x}=\lim_{x=0}\,(-x)=0.$$

Слѣд., $\lim_{x=0} x^x=1.$

§ 193. **Maxima и minima функцій одного перемѣннаго.** Въ § 132 было доказано, что если непрерывная функція $f(x)$ при $x=a$ достигаетъ *наибольшаго* или *наименьшаго* значенія, то ея производная $f'(x)$ обращается въ *нуль* при $x=a$, такъ что условіе $f'(a)=0$ является *необходимымъ* признакомъ существованія *maximum* или *minimum* функціи $f(x)$ при $x=a$. Для вывода *достаточныхъ* признаковъ существованія *maximum* или *minimum* и признаковъ, по которымъ можно было бы аналитически различать случаи *maximum* и *minimum*, воспользуемся разложеніемъ функціи въ рядъ Тэйлора (§ 187).

Пусть послѣдовательныя производныя функціи $f(x)$ до производной $(n-1)$-аго порядка включительно при $x=a$ равны *нулю*, а производная n-аго порядка отлична отъ нуля:

$$f'(a)=0;\; f''(a)=0;..;\; f^{(n-1)}(a)=0;\; f^{(n)}(a)\neq 0.$$

По формулѣ (123) при этихъ условіяхъ имѣемъ:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\vartheta h),\; 0<\vartheta<1.$$

Отсюда находимъ разность $f(a+h)-f(x)$:

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{n!}\Big[f^{(n)}(a)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(a+\vartheta h)\Big].$$

Если при $x=a$ функція $f(x)$ имѣетъ *maximum*, то первая часть этого равенства должна быть *отрицательна* для достаточно малыхъ по абсолютной величинѣ значеній h, какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ; въ случаѣ же *minimum* функціи при $x=a$ первая часть равенства должна быть *положительна* для указан-

ныхъ значеній h (§ 132). Отсюда слѣдуетъ, что въ случаѣ *maximum* или *minimum* функціи при $x=a$ знакъ разности $f(a+h)-f(a)$ не зависитъ отъ знака h. Вторая часть этого равенства показываетъ, что это требованіе выполняется только въ томъ случаѣ, когда n есть *четное* число. Дѣйствительно, второй множитель второй части равенства *при достаточно малыхъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ* h имѣетъ знакъ перваго члена, т.-е. $f^{(n)}(a)$; первый же множитель, т.-е. $h^n/n!$ при n *четномъ* положителенъ. Слѣд., знакъ разности $f(a+h)-f(a)$ не зависитъ отъ знака h и совпадаетъ съ знакомъ $f^{(n)}(a)$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему правилу для нахожденія *maximum* или *minimum* функціи $f(x)$: взявъ первую производную функціи $f(x)$, приравниваемъ ее нулю; рѣшивъ полученное такимъ образомъ уравненіе $f'(x)=0$, мы находимъ тѣ значенія x, при которыхъ функція $f(x)$ *можетъ* имѣть *maximum* или *minimum*. Пусть $x=a$ есть одинъ изъ корней этого уравненія. Подставляемъ a вмѣсто x во вторую, третью и т. д. производныя функціи $f(x)$ до тѣхъ поръ, пока не получимъ результата, отличнаго отъ нуля.

Если первая изъ производныхъ функціи $f(x)$, не обращающихся въ нуль при $x=a$, окажется *четнаго* порядка, то функція *имѣетъ maximum* или *minimum*; *maximum* въ томъ случаѣ, когда значеніе при $x=a$ этой производной *отрицательно*, и *minimum*, когда оно *положительно*. Если же первая изъ производныхъ, не обращающихся въ нуль при $x=a$, окажется *нечетнаго* порядка, то при $x=a$ функція $f(x)$ *не* имѣетъ ни *maximum*, ни *minimum*. Указанное изслѣдованіе нужно произвести для каждаго изъ дѣйствительныхъ корней уравненія $f'(x)=0$ *).

Примѣръ. Найдемъ *maximum* и *minimum* функціи:

$$f(x)=10x^7-42x^5+35x^4+9.$$

Находимъ $f'(x)$ и приравниваемъ ее нулю:

$$f'(x)=70x^3(x^3-3x+2)=0.$$

Корни этого уравненія суть: $x_1=x_2=x_3=0$; $x_4=x_5=1$; $x_6=-2$. Составляемъ вторую производную функціи $f(x)$:

$$f''(x)=420(x^5-2x^3+x^2).$$

---

*) Рѣшеніе задачи о *maxima* и *minima* функціи двухъ перемѣнныхъ см. въ болѣе подробныхъ курсахъ анализа, напр., въ курсѣ *А. К. Власова*: *„Высшая математика“*, т. II.

Полагая $x=-2$, находимъ: $f(-2)=-5040$. Отсюда заключаемъ, что при $x=-2$ функція $f(x)$ имѣетъ *maximum*.

Для $x=1$ имѣемъ: $f''(1)=0$. Составляемъ третью производную:

$$f'''(x)=420(5x^4-6x^2+2x).$$

Такъ какъ $f'''(1)=420$, то при $x=1$ функція $f(x)$ не имѣетъ ни *maximum*, ни *minimum*.

Для $x=0$ имѣемъ: $f''(0)=0$, $f'''(0)=0$. Составляемъ четвертую производную:

$$f^{(IV)}(x)=840(10x^3-6x+1).$$

Такъ какъ $f^{(IV)}(0)=840$, то при $x=0$ функція $f(x)$ имѣетъ *minimum*.

§ 194. Приближенное вычисленіе корней алгебраическаго уравненія (способъ Ньютона).

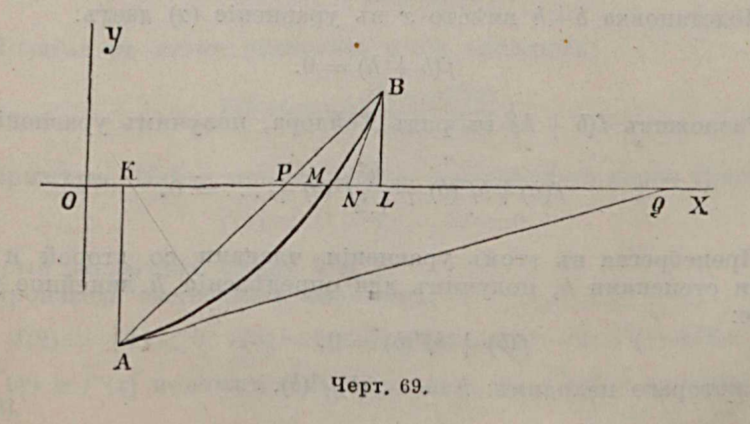
При рѣшеніи алгебраическаго уравненія

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

иногда бываетъ нужно найти приближенное значеніе его корня x_0, зная, что этотъ корень *простой* (§ 151) и содержится между числами a и b. Для рѣшенія этой задачи *Ньютонъ* (*Newton*) воспользовался рядомъ Тэйлора и указалъ способъ, носящій его имя и усовершенствованный затѣмъ *Фурье (Fourier)*.

Пусть a и b два числа, между которыми лежитъ *одинъ только* корень уравненія (a). Для опредѣленности положимъ, что $a<b$, и что, слѣд., $a<x_0<b$.

Если x и y принять за координаты точки на плоскости, то уравненіе $y=f(x)$ опредѣлитъ *кривую* (§ 18), а *абсциссы* точекъ



Черт. 69.

пересѣченія ея съ осью x представляютъ *дѣйствительные* корни уравненія (α) (§ 19). Эта кривая, по предположенію, имѣетъ *одну только* точку пересѣченія съ осью x въ интервалѣ (a, b). Поэтому значенія ея ординатъ $f(a)$ и $f(b)$ для концовъ интервала имѣютъ *противоположные* знаки. Допустимъ, кромѣ того, что въ интервалѣ (a, b) функція $f(x)$ измѣняется *монотонно*, т.-е. или постоянно возрастаетъ, или постоянно убываетъ, и что въ этомъ интервалѣ нѣтъ точекъ *перегиба* (§ 134) кривой. Аналитически два послѣднія условія сводятся къ тому, что въ интервалѣ (a, b) первая и вторая производныя $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны отъ нуля (§§ 131 и слѣд.).

Пусть всѣ перечисленныя условія выполнены, и найдено, что

$$f(a) < 0; \ f(b) > 0;$$

$f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ для всѣхъ значеній x въ интервалѣ (a, b). Расположеніе кривой $y = f(x)$ въ интервалѣ (a, b) указано на чертежѣ 69 (см. § 134), гдѣ $OK = a$, $OM = x_0$, $OL = b$, $KA = f(a)$, $LB = f(b)$.

Каждое изъ чиселъ a и b, между которыми, по условію, лежитъ *только одинъ* корень x_0 уравненія (α), можно разсматривать, какъ первое приближеніе искомаго корня. Возьмемъ то изъ нихъ, для котораго значенія $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ *одинаковые* знаки. Въ нашемъ случаѣ это число есть b.

Такъ какъ b не есть корень x_0 уравненія (α), то внесемъ поправку, предположивъ $x_0 = b + h$, гдѣ h есть неизвѣстное число, малое по абсолютному значенію, если, какъ это обыкновенно бываетъ на практикѣ, числа a и b достаточно близки другъ къ другу.

Подстановка $b + h$ вмѣсто x въ уравненіе (α) даетъ:

$$f(b + h) = 0.$$

Разложивъ $f(b + h)$ въ рядъ Тейлора, получимъ уравненіе:

$$f(b) + hf'(b) + \frac{h^2}{1.2} f''(b) + \ldots = 0.$$

Пренебрегая въ этомъ уравненіи членами со второй и высшими степенями h, получимъ для опредѣленія h линейное уравненіе:

$$f(b) + hf'(b) = 0,$$

изъ котораго находимъ: $h = -f(b)/f'(b)$.

Внося это значеніе h въ сумму $b+h$, получимъ второе приближеніе корня, которое обозначимъ черезъ b_1. Поступая съ b_1 такъ же, какъ съ b, найдемъ третье приближеніе и т. д.

Изъ геометрическихъ соображеній легко убѣдиться, что b_1 лежитъ ближе къ неизвѣстному корню x_0 и притомъ съ той же стороны, съ какой лежитъ b, т.-е. что въ нашемъ случаѣ $x_0 < b_1 < b$. Дѣйствительно, составляя уравненіе касательной къ кривой $y=f(x)$ въ точкѣ $B[b, f(b)]$, находимъ (§§ 31, 106):

$$y-f(b)=f'(b)(x-b).$$

Точка N пересѣченія касательной съ осью x опредѣляется абсциссой $ON=b-f(b)/f'(b)=b+h$. Такъ какъ эта точка N при указанномъ расположеніи кривой лежитъ между точками M и L, то она *ближе* къ M, чѣмъ точка L, и находится съ L по одну сторону отъ точки M. Такимъ образомъ $b+h$ представляетъ приближеніе корня x_0 съ большею точностью, чѣмъ b.

Тотъ же методъ въ приложеніи къ числу a, для котораго значенія $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ разные знаки, можетъ повести не къ приближенію къ корню, а къ удаленію отъ него (см. на черт. 69 точку Q).

Но число a, взятое, какъ первое приближеніе корня x_0, можно исправить другимъ способомъ. Хорда AB при данномъ расположеніи кривой пересѣкаетъ ось x въ точкѣ P, лежащей между K и M. Слѣд., абсциссу этой точки можно взять за второе приближеніе корня. Найдемъ ея значеніе.

Составляя уравненіе хорды AB, находимъ (§ 32):

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Полагая въ этомъ уравненіи $y=0$, находимъ

$$OP=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Примѣръ. Найти приближенное значеніе того корня уравненія

$$f(x)\equiv x^3-4x-12=0,$$

который заключенъ между 2 и 3.

Произведя вычисленія, находимъ:

$$f(2)=-12<0;\ f(3)=3>0;\ f'(x)=3x^2-4;\ f''(x)=6x.$$

$f'(x)$ и $f''(x)$ положительны для всѣхъ значеній x въ интервалѣ (2, 3).

Принявъ за первое приближеніе число 3 и вычисляя поправку h, находимъ

$$3+h=3-\frac{3}{23}=3-0{,}1304\,..=2{,}86...$$

Съ другой стороны, принимая за первое приближеніе число 2 и вычисляя поправку къ нему, находимъ слѣдующее приближенное значеніе корня:

$$2+\frac{12}{3+12}=2{,}8.$$

Отсюда заключаемъ, что искомый корень отличается отъ 2, менѣе, чѣмъ на 0,1.

§ 195. **Интегрированіе при помощи рядовъ.** Приложеніе безконечныхъ рядовъ къ интегрированію функцій основано на томъ, что для вычисленія интеграла функціи, представляемаго *равномѣрно* сходящимся рядомъ, достаточно почленно интегрировать этотъ рядъ (сравн § 177).

Пусть рядъ

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots (u)$$

гдѣ u суть функціи x, есть равномѣрно сходящійся въ нѣкоторомъ интервалѣ. Обозначивъ черезъ $f(x)$ его сумму и черезъ R_n дополнительный членъ, находимъ:

$$f(x)=u_1+u_2+\ldots+u_n+R_n,$$

откуда черезъ интегрированіе получаемъ:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u_1dx+\int_a^b u_2dx+\ldots+\int_a^b u_ndx+\int_a^b R_ndx,$$

гдѣ a и b суть два числа, лежащія въ интервалѣ сходимости ряда (u). Такъ какъ рядъ (u) предполагается *равномѣрно* сходящимся, то (§ 174), начиная съ нѣкотораго значенія n, для всѣхъ значеній x въ интервалѣ сходимости имѣемъ неравенство:

$$|\,R_n(x)\,|<\varepsilon,$$

гдѣ ε есть произвольное малое число.

Поэтому (§ 159), если $b>a$, то

$$\left|\int_a^b R_n(x)dx\right|<\varepsilon(b-a).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b R_n dx = 0,$$

и, слѣд.,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \ldots$$

Изложенную теорему можно приложить къ вычисленію интеграла, если подъинтегральная функція разлагается въ рядъ, *равномѣрно* сходящійся въ нѣкоторомъ интервалѣ.

Пусть, напримѣръ, требуется найти

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-e^2 sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi,$$

гдѣ $e^2 < 1$. Разлагая въ рядъ $(1-e^2 sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$, находимъ (§ 185):

$$(1-e^2sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}e^2sin^2\varphi - \frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}e^4sin^4\varphi - \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}e^6sin^6\varphi - \ldots$$

Рядъ второй части есть равномѣрно сходящійся въ интервалѣ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому (§ 161)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-e^2sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}e^2 - \frac{1^2\,.\,3}{2^2\,.\,4^2}e^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}e^6 - \ldots\right)$$

Упражненія.

1. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{a-\sqrt[n]{a^n-x^n}}{x^n} = \dfrac{1}{na^{n-1}}$.

2. $\lim\limits_{x=\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-sinx+cosx}{sin2x-cosx} = 1$.

3. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{sinx-xcosx}{sin^3x} = \dfrac{1}{3}$.

4. $\lim\limits_{x=0}\dfrac{x-arcsin\,x}{sin^3x} = -\dfrac{1}{6}$.

5. *Найти maximum и minimum функціи*

$$y = x^5 - 5ax^4 + 5a^2x^3 + a^5,\ (a > 0).$$

Отв. Max. при $x = a$; *min.* при $x = 3a$.

6. *Уравненіе*

$$x^3-2x-5=0$$

имѣетъ корень между числами 2 *и* 2,1. *Найти его приближенное значеніе съ точностью до* 0,001.

Отв. 2,094.

7. *Показать, что*

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3.3\,!} + \frac{x^5}{5.5!} - \ldots;$$

$$\int_a^x \frac{\cos x}{x}\,dx = \log\frac{x}{a} - \frac{x^2-a^2}{2.2\,!} + \frac{x^4-a^4}{4.4\,!} - \ldots,\ a>0,\ x>0;$$

$$\int_a^x \frac{e^x}{x}\,dx = \log\frac{x}{a} + \frac{x-a}{1} + \frac{x^2-a^2}{2.2\,!} + \frac{x^3-a^3}{3.3\,!} + \ldots;\ a>0, x>0.$$

(*См.* § 158, *D*).

ГЛАВА XIX.

Нѣкоторыя геометрическія приложенія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Понятіе о двойномъ и тройномъ интегралахъ.

§ 196. **Касательная и нормаль плоской кривой.** Пользуясь уравненіемъ (18) пучка прямыхъ и указаніемъ § 106 на геометрическое значеніе производной данной функціи, легко видѣть, что *касательная* къ кривой $y=f(x)$ въ ея точкѣ (x, y) опредѣляется уравненіемъ:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (124)$$

гдѣ X и Y суть текущія координаты.

Если кривая дана уравненіемъ $f(x, y)=0$, то уравненіе касательной принимаетъ слѣдующій видъ (§ 140):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (124')$$

Нормалью къ данной кривой въ данной ея точкѣ называется прямая, перпендикулярная къ касательной въ этой точкѣ.

Уравненіе нормали, соотвѣтственно уравненіямъ (124) и (124′), представляется въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ (см. ур. 18 и 17):

$$X-x+\frac{dy}{dx}(Y-y)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X-x)-\frac{\partial f}{\partial x}(Y-y)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125')$$

Иногда кривая опредѣляется двумя уравненіями вида:

$$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t),$$

гдѣ t есть нѣкоторый *параметръ*. Ясно, что исключеніе этого параметра изъ написанныхъ двухъ уравненій приводитъ къ уравненію $f(x,\ y)=0$. Но часто бываетъ удобнѣе удерживать *параметрическое* опредѣленіе кривой и въ вычисленіяхъ пользоваться параметромъ t.

Такъ какъ

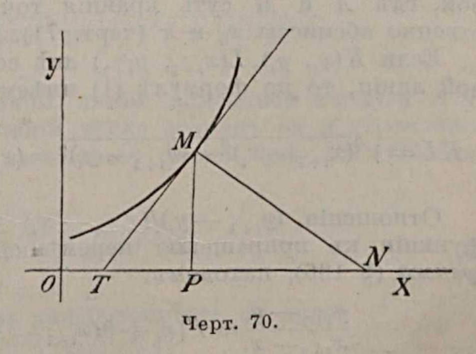
$$dx=\varphi'_1(t)dt,\ dy=\varphi'_2(t)dt,\ \frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'_2(t)}{\varphi'_1(t)},$$

то уравненія (124) и (125) преобразуются для разсматриваемаго случая въ слѣдующія:

$$\frac{X-\varphi_1(t)}{\varphi'_1(t)}=\frac{Y-\varphi_2(t)}{\varphi'_2(t)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124'')$$

$$\frac{X-\varphi_1(t)}{\varphi'_2(t)}+\frac{Y-\varphi_2(t)}{\varphi'_1(t)}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125'')$$

§ 197. **Длина касательной и нормали. Субтангенсъ и субнормаль.** Съ касательной и нормалью данной кривой связаны нѣсколько отрѣзковъ, которыми приходится пользоваться при изученіи кривой. Эти отрѣзки слѣдующіе: отрѣзокъ MT касательной отъ точки M кривой до точки T пересѣченія ея съ осью x (черт. 70); этотъ отрѣзокъ называется *касательной* и обозначается черезъ T; проекція TP касательной T на ось x; отрѣзокъ TP называется *субтангенсомъ* и обозначается черезъ S_t; отрѣзокъ MN нор-



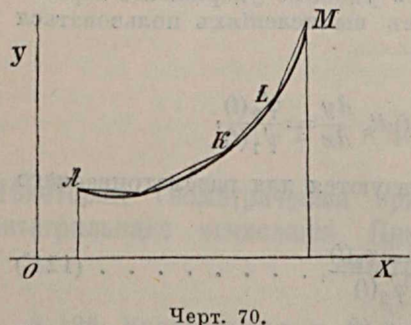
Черт. 70.

мали отъ точки M кривой до точки N пересѣченія ея съ осью x; онъ называется *нормалью* и обозначается черезъ N; проекція PN нормали N на ось x; отрѣзокъ PN называется *субнормалью* и обозначается черезъ S_n.

Отрѣзки T, N, S_t и S_n весьма просто выражаются черезъ ординату y точки M и ея производную y'. Дѣйствительно, замѣтивъ, что $\tan \angle PTM = y'$ (§ 106), изъ прямоугольныхъ треугольниковъ TPM и NPM находимъ:

$$S_t = \frac{y}{y'};\ S_n = yy';\ T = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2};\ N = y\sqrt{1+y'^2}.$$

§ 198. **Длина дуги кривой.** Для выясненія того, что разумѣется подъ *длиной дуги* данной кривой, можно употребить пріемъ, аналогичный указанному въ § 144.



Черт. 70.

Пусть имѣемъ кривую, опредѣляемую въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіемъ $y = f(x)$, при чемъ $f(x)$ обозначаетъ функцію, непрерывную вмѣстѣ съ ея производной въ нѣкоторомъ интервалѣ $(x_0,\ x)$. Положимъ для опредѣленности, что $x > x_0$, и вставимъ между x_0 и x рядъ возрастающихъ чиселъ: $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1}$. Построивъ ординаты кривой, соотвѣтствующія абсциссамъ $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1},\ x$, мы найдемъ на кривой рядъ точекъ, послѣдовательное соединеніе которыхъ прямыми дастъ ломаную линію, вписанную въ дугу AM данной кривой, гдѣ A и M суть крайнія точки дуги, имѣющія соотвѣтственно абсциссы x_0 и x (черт. 71).

Если $K(x_i,\ y_i)$, $L(x_{i+1},\ y_{i+1})$ двѣ сосѣднія вершины этой ломаной линіи, то по формулѣ (1) имѣемъ:

$$KL = \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2} = (x_{i+1}-x_i)\sqrt{1+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2}.$$

Отношеніе $(y_{i+1}-y_i)/(x_{i+1}-x_i)$ есть отношеніе приращенія функціи къ приращенію перемѣннаго. Примѣняя теорему *Лагранжа* (§ 136), находимъ:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} = f'[x_i+\vartheta(x_{i+1}-x_i)],\ 0 < \vartheta < 1,$$

или, пользуясь непрерывностью функціи $f'(x)$,

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}=f'(x_i)+\alpha_i,$$

при чемъ α_i стремится къ нулю вмѣстѣ въ разностью $x_{i+1}-x_i$.

Полагая $x_{i+1}-x_i=\Delta x_i$, получаемъ:

$$KL=\Delta x_i\sqrt{1+[f'(x_i)+\alpha_i]^2}=\Delta x_i\left\{\sqrt{1+[f'(x_i)]^2}+\varepsilon_i\right\},$$

гдѣ ε_i стремится къ нулю вмѣстѣ съ Δx_i.

Суммируя звенья ломаной линіи, мы находимъ слѣдующее выраженіе для ея *периметра*:

$$\Sigma KL=\Sigma\Delta x_i\sqrt{1+[f'(x_i)]^2}+\Sigma\varepsilon_i\Delta x_i.$$

Если мы будемъ безгранично увеличивать число звеньевъ ломаной линіи, приближая къ нулю каждое изъ нихъ, то ΣKL будетъ стремиться къ предѣлу, равному

$$\lim\Sigma\Delta x_i\sqrt{1+[f'(x_i)]^2},$$

такъ какъ $\lim\Sigma\varepsilon_i\Delta x_i=0$. Дѣйствительно, если δ есть наибольшее изъ абсолютныхъ значеній чиселъ ε_i, то

$$|\Sigma\varepsilon_i\Delta x_i|<\delta\Sigma\Delta x_i;$$

но $\Sigma\Delta x_i=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x-x_{n-1})=x-x_0$; слѣдовательно

$$|\Sigma\varepsilon\Delta x_i|<\delta(x-x_0).$$

Такъ какъ $\lim\delta=0$, а $x-x_0$ есть число конечное, то

$$\lim\Sigma\varepsilon_i\Delta x_i=0.$$

Но (§ 144)

$$\lim\Sigma\Delta x_i\sqrt{1+[f'(x_i)]^2}=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Предѣлъ периметра ломаной линіи, вписанной въ дугу AM, при неограниченномъ возрастаніи числа сторонъ ея и стремленіи каждой стороны къ нулю, называется *длиной дуги* AM. Обозначивъ ее черезъ s, находимъ:

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Отсюда получаемъ (§ 144) дифференціалъ ds дуги:

$$ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

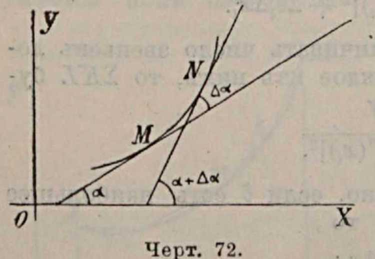
или, въ другихъ обозначеніяхъ,

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (126)$$

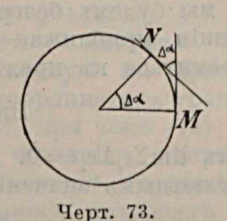
Изъ этихъ формулъ, принимая во вниманіе, что (§ 106) $y' = tan\alpha$, гдѣ α есть уголъ касательной къ кривой съ осью x, легко получить слѣдующія:

$$\frac{dx}{ds} = cos\alpha; \; \frac{dy}{ds} = sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (127)$$

§ 199. **Кривизна кривой.** Возьмемъ на кривой $y = f(x)$ двѣ точки: $M(x, y)$ и $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$; длину дуги MN обозначимъ черезъ Δs, а углы, составленные осью x и касательными къ кривой



Черт. 72.



Черт. 73.

въ точкахъ M и N, соотвѣтственно черезъ α и $\alpha + \Delta\alpha$. Тогда $\Delta\alpha$ представитъ (черт. 72) уголъ между касательными, т.-е. отклоненіе конечной касательной отъ начальной, соотвѣтствующее переходу по дугѣ отъ ея начала M къ ея концу N. При постоянной длинѣ та дуга имѣетъ *бóльшую* кривизну, для которой $\Delta\alpha$ *больше*, а при постоянномъ $\Delta\alpha$ та дуга имѣетъ *бóльшую* кривизну, для которой Δs *меньше*.

Отношеніе $\Delta\alpha/\Delta s$ называется *средней кривизной* дуги Δs, а предѣлъ, къ которому стремится это отношеніе при стремленіи Δs къ нулю, называется *кривизной* или *мѣрою кривизны* кривой въ точкѣ M.

Для круга радіуса R уголъ $\Delta\alpha$ равенъ центральному углу, соотвѣтствующему дугѣ MN (черт. 73). Такъ какъ $\Delta s = R\Delta\alpha$, то

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}, \quad \lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

т.-е. кругъ есть кривая *постоянной* кривизны. Мѣрою ея служитъ обратная величина радіуса.

Вычислимъ мѣру кривизны данной кривой, предполагая, что она отнесена къ прямоугольной системѣ координатъ.

Такъ какъ

$$\lim_{\Delta s=0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds},$$

то задача сводится къ вычисленію дифференціала $d\alpha$, который называется *угломъ смежности*, и элемента дуги ds.

Примемъ x за независимое перемѣнное. Такъ какъ (§ 105)

$$\alpha = arctang y',$$

то

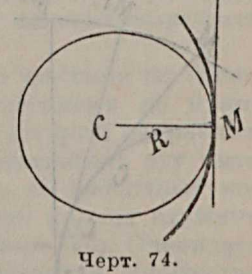
$$d\alpha = \frac{d arctang y'}{dx} dx = \frac{y''}{1+y'^2} dx.$$

Зная, что $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$ (§ 198), находимъ:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Эта формула даетъ выраженіе кривизны кривой въ данной ея точкѣ.

§ 200. **Кругъ кривизны.** Кругомъ кривизны въ точкѣ M данной кривой называется кругъ, проходящій черезъ точку M, имѣющій въ этой точкѣ общую съ кривой касательную и одинаковую съ кривой кривизну (черт. 74).



Черт. 74.

Центръ такого круга называется *центромъ кривизны* въ точкѣ M, а радіусъ—*радіусомъ кривизны* въ точкѣ M.

Изъ формулъ предыдущаго параграфа легко получить выраженіе радіуса кривизны. Обозначивъ его черезъ R, находимъ:

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (128)$$

Найдемъ координаты ξ и η центра кривизны. Такъ какъ по опредѣленію круга кривизны центръ его лежитъ на нормали къ кривой въ точкѣ (x, y), а эта точка (x, y) лежитъ на кругѣ, то (урр. 125 и 30) для опредѣленія ξ и η имѣемъ слѣдующія уравненія:

$$\xi - x + y'(\eta - y) = 0; \quad (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = R^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

Отсюда находимъ:

$$\xi - x = \pm \frac{(1+y'^2)y'}{y''}; \quad \eta - y = \pm \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Для рѣшенія вопроса о знакахъ, которые нужно взять во вторыхъ частяхъ этихъ формулъ, замѣтимъ, что если кривая вогнутостью обращена въ сторону положительнаго направленія оси y, то $\eta > y$ и $y'' > 0$; если же она обращена выпуклостью въ сторону положительнаго направленія оси y, то $\eta < y$ и $y'' < 0$ (сдѣлать чертежъ; см. § 134). Слѣд., въ томъ и другомъ случаѣ $\eta - y$ и y'' одного знака.

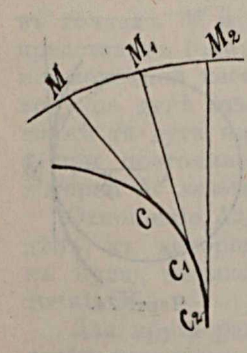
Поэтому во второй изъ разсматриваемыхъ формулъ нужно взять знакъ $+$, а въ первой знакъ $-$. Итакъ, координаты ξ и η центра кривизны опредѣляются формулами:

$$\xi = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''}; \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

Эти формулы введеніемъ радіуса R кривизны и угла a касательной съ осью x преобразуются въ слѣдующія:

$$\xi = x - R\sin a; \quad \eta = y + R\cos a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

§ 201. **Эволюта.** При непрерывномъ перемѣщеніи точки (x, y) по данной кривой центръ кривизны также непрерывно перемѣщается, описывая кривую, называемую *эволютою* данной кривой, такъ что *эволюта данной кривой есть геометрическое мѣсто ея центровъ кривизны* (черт. 75).



Черт. 75.

Разсмотримъ два свойства эволюты.

1. *Нормаль къ данной кривой есть касательная къ эволютѣ.*

Такъ какъ угловые коэффиціенты касательной къ эволютѣ въ точкѣ (ξ, η) и касательной къ кривой въ точкѣ (x, y) суть соотвѣтственно $\frac{d\eta}{d\xi}$ и $\frac{dy}{dx}$, то для доказательства указаннаго свойства эволюты достаточно показать (форм. 17), что

$$1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0.$$

Дифференцируя равенства (130), имѣемъ:

$$d\xi = dx - R\cos a da - \sin a dR; \quad d\eta = dy - R\sin a da + \cos a dR.$$

Но (§ 199) $R da = ds$ и по формуламъ (127) $dx = ds . \cos a$, $dy = ds . \sin a$.

Поэтому $d\xi = -\sin\alpha dR$ и $d\eta = \cos\alpha dR$ и

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha.$$

А такъ какъ $\frac{dy}{dx} = \tan\alpha$ (§ 106), то

$$1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0.$$

2. *Дифференціалъ дуги эволюты равенъ (по абсолютному значенію) дифференціалу радіуса кривизны.*

Дифференціалъ $d\sigma$ дуги эволюты равенъ $\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ (форм. 126). Возвышая найденныя выше выраженія $d\xi$ и $d\eta$ въ квадратъ и складывая результаты, находимъ:

$$d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2 \text{ или } d\sigma^2 = dR^2.$$

Отсюда получаемъ

$$d\sigma = \pm dR.$$

То же самое свойство эволюты можно выразить иначе. Интегрируя послѣднее равенство и называя σ_0 и R_0 соотвѣтственныя значенія дуги эволюты и радіуса кривизны, находимъ:

$$\sigma - \sigma_0 = \pm (R - R_0),$$

т.-е. *длина дуги эволюты равна по абсолютному значенію разности радіусовъ кривизны данной кривой въ точкахъ, соотвѣтствующихъ концамъ дуги эволюты.*

Это свойство эволюты объясняетъ и самое названіе ея. Если на кривой, которая принимается за эволюту, натянемъ до нѣкоторой точки нерастяжимую нить, продолженіе которой направимъ по касательной къ эволютѣ, и будемъ затѣмъ сматывать эту нить съ эволюты, оставляя ее все время натянутой, то свободный конецъ нити опишетъ кривую, для которой данная кривая служитъ эволютой. Эта кривая называется *эвольвентой* (черт. 75). Очевидно, что для данной эволюты существуетъ безчисленное множество эвольвентъ, представляющихъ *параллельныя* кривыя, т.-е. такія, разстоянія между которыми всюду одинаковы.

§ 202. **Циклоида.** Въ качествѣ примѣра разсмотримъ приложеніе формулъ §§ 196—201 къ *циклоидѣ.*

Циклоидой называется кривая, описываемая точкой окружности круга, который катится безъ скольженія по прямой.

Выведемъ уравненіе циклоиды (черт. 76).

Прямую, по которой катится кругъ, примемъ за ось абсциссъ. То положеніе этого круга, когда точка M, описывающая цик-

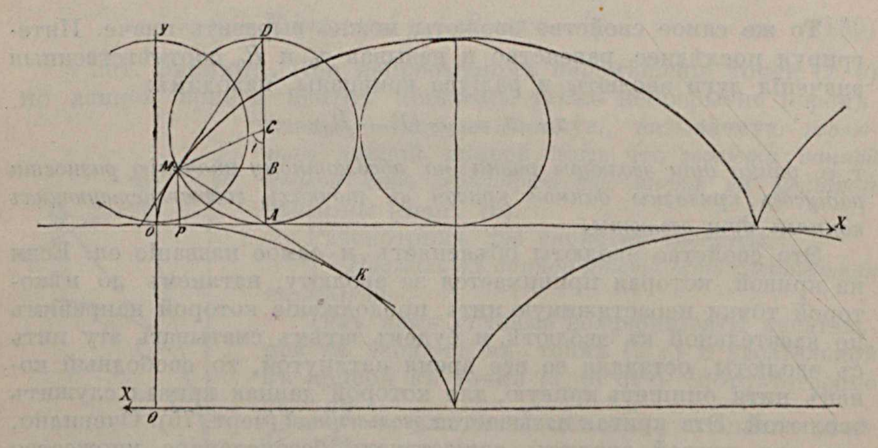
лоиду, находится на оси x, возьмемъ за начальное, а начальное положеніе O точки M примемъ за начало координатъ. За положительное направленіе оси ординатъ возьмемъ направленіе перпендикуляра, возставленнаго изъ O къ оси x въ той части плоскости, гдѣ находится катящійся кругъ. Кромѣ того предположимъ, что направленіе, въ которомъ катится кругъ, совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ оси x.

Въ начальномъ положеніи радіусъ CM круга перпендикуляренъ къ оси x, а при движеніи его онъ отклоняется отъ перпендикуляра къ оси x на нѣкоторый уголъ t, черезъ который мы выразимъ координаты точки циклоиды.

Если A есть точка касанія круга C съ осью x, то $t = \angle ACM$. Опустивъ изъ M перпендикуляръ MP на ось x, получимъ координаты точки M циклоиды:

$$x = OP = OA - PA;\ y = PM.$$

Такъ какъ кругъ катится *безъ* скольженія, то $OA = \widehat{AM} = at$, гдѣ a есть радіусъ катящагося круга.



Черт. 76.

Проведя MB параллельно оси x до встрѣчи съ радіусомъ AC, находимъ, что $PA = MB = a\sin t$ и $BC = a\cos t$. Поэтому

$$x = OA - PA = a(t - \sin t);\ y = PM = AC - BC = a(1 - \cos t).$$

Итакъ, для опредѣленія координатъ точки циклоиды черезъ параметръ t имѣемъ два слѣдующія уравненія:

$$x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t)\ \ldots\ldots\ldots \quad (131)$$

Исключенiе изъ этихъ уравненiй параметра t приводитъ къ уравненiю циклоиды:

$$x = a.arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{y(2a-y)}.$$

Въ приложенiяхъ удобнѣе пользоваться параметрическими уравненiями циклоиды, т.-е. уравненiями (131).

Циклоида состоитъ изъ безчисленнаго множества одинаковыхъ *аркадъ*, крайнiя точки которыхъ соотвѣтствуютъ $t = 2k\pi$, а *высшiя* точки $t=(2k+1)\pi$, гдѣ k есть цѣлое число или нуль.

Найдемъ уравненiе касательной къ циклоидѣ.

Изъ уравненiй (131) имѣемъ:

$$dx = a(1 - cost)dt;\ dy = asintdt;\ \frac{dy}{dx} = \frac{sint}{1 - cost} = cot\frac{t}{2}.$$

Пользуясь уравненiемъ (124), находимъ уравненiе касательной къ циклоидѣ въ ея точкѣ $(x,\ y)$:

$$Y - y = cot\frac{t}{2}(X - x).$$

Изъ соотношенiя $y' = cot\frac{t}{2}$ легко вывести способъ построенiя касательной и нормали къ циклоидѣ. Продолживъ AC до второй встрѣчи съ окружностью въ точкѣ D и соединивъ D съ M, находимъ, что

$$\angle MDC = t/2 \text{ и что } (\widehat{MD,x}) = \pi/2 - t/2,\ (t < \pi), \text{ и } tan\ (\widehat{MD,x}) = cot\frac{t}{2}.$$

Слѣдовательно, MD есть касательная къ циклоидѣ, а MA нормаль къ ней.

Вычислимъ длину нормали (§ 197):

$$N = y\sqrt{1 + y'^2} = a(1 - cost)\sqrt{1 + cot^2\frac{t}{2}} = \frac{a(1 - cost)}{sin\frac{t}{2}} = 2asin\frac{t}{2}.$$

Для вычисленiя радiуса кривизны нужно найти y'':

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{1}{sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{a(1 - cost)} = -\frac{1}{4asin^4\frac{t}{2}}.$$

Подставляя значенiя y' и y'' въ формулу (128), получимъ радiусъ кривизны циклоиды:

$$R = -4asin^4\frac{t}{2}\left(1 + cot^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = -4asin\frac{t}{2}.$$

Сравнивая значенія N и R, находимъ: $|R| = 2|N|$ (на черт. $MK = 2MA$).

Вычислимъ координаты центра кривизны циклоиды. Примѣняя формулы (129), находимъ:

$$\xi = a(t - sint) + \left(1 + cot^2\frac{t}{2}\right) \cdot 4asin^4\frac{t}{2} \cdot cot\frac{t}{2} = a(t - sint) + 2asint =$$
$$= a(t + sint);$$

$$\eta = a(1 - cost) - \left(1 + cot^2\frac{t}{2}\right) \cdot 4asin^4\frac{t}{2} = a(1 - cost) - 2a(1 - cost) =$$
$$= -a(1 - cost).$$

Перенесемъ начало координатъ въ точку $(\pi a, -2a)$ и измѣнимъ направленіе оси x на противоположное. Обозначивъ координаты по новой системѣ черезъ X и Y, находимъ по формуламъ (42):

$$\xi = -X + \pi a;\ \eta = Y - 2a.$$

Подставивъ сюда найденныя выше выраженія и опредѣливъ затѣмъ координаты X и Y центра кривизны относительно новой системы координатъ, получимъ:

$$X = a[\pi - t - sint] = a(\varphi - sin\varphi),$$
$$Y = a(1 + cost) = a(1 - cos\varphi),$$

гдѣ $\varphi = \pi - t$. Изъ этихъ формулъ видно, что эволюта циклоиды есть такая же циклоида, но расположенная ниже первой на $2a$ и сдвинутая вправо на πa.

Вычислимъ, наконецъ, длину одной аркады циклоиды. Пользуясь найденными выше выраженіями для dx и dy, находимъ по формулѣ (126) слѣдующее выраженіе дифференціала ds дуги циклоиды:

$$ds = a\sqrt{(1 - cost)^2 + sin^2t}\,dt = a\sqrt{2(1 - cost)}\,dt = 2asin\frac{t}{2}dt.$$

Длина аркады циклоиды равна

$$2a\int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt = -2a \cdot 2\left[cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a.$$

§ 203. **Квадратура площадей.** Въ §§ 143 и 144 было указано, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$, двумя ея ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ x_0 и x, и отрѣзкомъ оси x между этими ординатами, выражается интеграломъ $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ вычисленія площадей.

Площадь сегмента параболы. Пусть имѣемъ параболу m-аго порядка

$$y = Ax^m,$$

гдѣ A есть постоянное число и $m \neq -1$.

Площадь u, ограниченная параболой, двумя ея ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ a и b, и отрѣзкомъ оси x между ними, выражается такъ:

$$u = \int_a^b Ax^m dx = A \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Если $a = 0$, то

$$u = A \cdot \frac{b^{m+1}}{m+1} = \frac{Ab^m . b}{m+1} = \frac{1}{m+1} x_1 y_1,$$

гдѣ x_1 и y_1 суть координаты конца дуги, ограничивающей площадь.

Въ частномъ случаѣ, при $m = \frac{1}{2}$, т.-е. параболы $y^2 = 2px$, имѣемъ отсюда:

$$u = \frac{2}{3} x_1 y_1.$$

Эта формула показываетъ, что дуга параболы $y^2 = 2px$ дѣлитъ прямоугольникъ, построенный на координатахъ ея точки, въ отношеніи $1:2$. Площадь сегмента параболы $= 4x_1y_1/3$.

Площадь эллипса. Данъ эллипсъ уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Принимая во вниманіе симметрію эллипса относительно осей, находимъ, что площадь его равна $4 \int^a ydx$. Вычислимъ этотъ интегралъ:

$$u = 4\int_0^a ydx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx;$$

полагая $x = a\cos\varphi$ и замѣчая, что $\varphi = \frac{\pi}{2}$ при $x = 0$ и $\varphi = 0$ при $x = a$, находимъ (§ 161):

$$u = 4\frac{b}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin\varphi.(-a\sin\varphi d\varphi) = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi = \pi ab.$$

Отсюда при $a = b$ получимъ извѣстную формулу площади круга радіуса a: $u = \pi a^2$.

Площадь циклоиды. Такъ какъ каждая аркада циклоиды симметрична относительно прямой, параллельной оси y и проходящей ея вершину, то ея площадь u выражается слѣдующимъ образомъ (§ 202):

$$u = 2a^2\int_{0}^{\pi} (1 - \cos t)^2 dt.$$

Вычисляя интегралъ второй части, находимъ:

$$\int_{0}^{\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \int_{0}^{\pi} dt - 2\int_{0}^{\pi} \cos t dt + \int_{0}^{\pi} \cos^2 t dt =$$

$$= \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{0}^{\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

Поэтому $u = 3\pi a^2$, т.-е. площадь одной аркады циклоиды равна утроенной площади катящагося круга.

§ 204. **Выраженіе площади черезъ двойной интегралъ.** Пусть мы имѣемъ замкнутую кривую, отнесенную къ прямоугольнымъ осямъ координатъ и опредѣляемую уравненіемъ $f(x, y) = 0$. Предположимъ, что прямыя, параллельныя осямъ координатъ, пересѣкаютъ ее не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ.

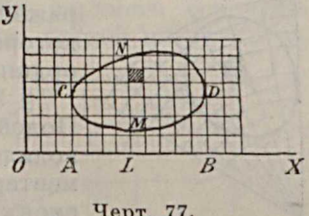
Площадь u, ограниченную этой кривой, можно разбить на *элементарные* прямоугольники, проведя рядъ прямыхъ, параллельныхъ оси x, и другой рядъ прямыхъ, параллельныхъ оси y (черт. 77). Если Δx и Δy обозначаютъ разстоянія между двумя сосѣдними прямыми, параллельными соотвѣтственно осямъ y и x, то площадь одного изъ нихъ выражается произведеніемъ $\Delta x\Delta y$.

Суммируя площади всѣхъ прямоугольниковъ, входящихъ въ площадь u, мы получимъ

$$u = \Sigma\Sigma\Delta x\Delta y + \varepsilon,$$

гдѣ ε есть сумма прилегающихъ къ границѣ площадей.

При стремленіи Δx и Δy къ нулю ε стремится къ нулю, и площадь u выразится, какъ предѣлъ двойной суммы второй части послѣдняго равенства. Этотъ предѣлъ носитъ названіе *двойного интеграла* и обозначается знакомъ $\int\int dxdy$.



Черт. 77.

Чтобы показать, что суммированіе распространяется на площадь u, нужно дать *предѣлы* измѣненія x и y.

Для опредѣленія ихъ замѣтимъ, что вычисленіе двойной суммы можно произвести слѣдующимъ образомъ: составить сначала сумму $\Sigma\Delta y$, соотвѣтствующую постоянному значенію x, а затѣмъ умножить ее на Δx и составить сумму $\sum\limits_x(\Delta x\sum\limits_y\Delta y)$.

Предѣлами суммы по y будутъ служить значенія y, получаемыя изъ уравненія $f(x, y)=0$ при рѣшеніи его относительно y; предѣлами же суммы по x будутъ значенія, между которыми лежатъ абсциссы всѣхъ точекъ кривой, ограничивающей площадь u. Геометрически составленіе произведенія $\Delta x\Sigma\Delta y$ представляетъ суммированіе элементарныхъ площадей, прилегающихъ къ одной изъ прямыхъ, параллельныхъ оси y, или вычисленіе площади полосы, заключенной между двумя сосѣдними прямыми, параллельными оси y, а суммированіе по x — составленіе суммы площадей всѣхъ такихъ полосъ, заключенныхъ между касательными къ кривой, параллельными оси y.

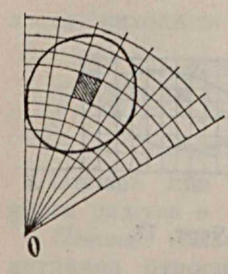
Если AC и BD суть эти касательныя и $OA=a$, $OB=b$, то предѣлы суммированія по x суть a и b. Предѣлами суммированія по y служатъ $LM=\varphi_1(x)$ и $LN=\varphi_2(x)$, гдѣ $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ суть значенія y, полученныя изъ уравненія $f(x, y)=0$. Такимъ образомъ получимъ:

$$u=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dxdy.$$

Можно перемѣнить порядокъ суммированій, но при этомъ, какъ это ясно изъ сказаннаго, измѣнятся и предѣлы суммированій.

Если кривая, ограничивающая площадь, отнесена къ системѣ полярныхъ координатъ (§ 7), то разбіеніе площади на элементарныя достигается проведеніемъ пучка прямыхъ изъ полюса и ряда концентрическихъ окружностей съ центромъ въ полюсѣ (черт. 78). Двѣ сосѣднихъ прямыхъ, опредѣляемыя полярными углами φ и $\varphi+\Delta\varphi$, и двѣ сосѣднихъ концентрическихъ окружности, опредѣляемыя радіусами r и $r+\Delta r$, образуютъ криволинейный четырехугольникъ.

При малыхъ Δr и $\Delta\varphi$ его можно считать прямоугольникомъ съ площадью $r\Delta r\Delta\varphi$. Предѣлъ суммы этихъ элементарныхъ площадей, взятой въ надлежащихъ предѣлахъ, дастъ выраженіе площади черезъ двойной интегралъ, въ которомъ перемѣнными служатъ полярныя координаты.



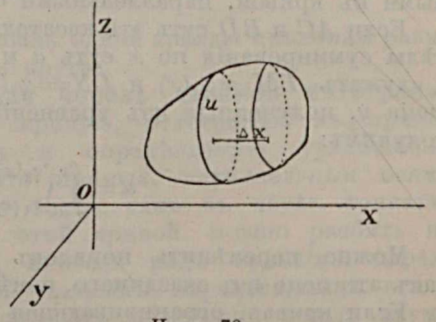
Черт. 78.

§ 205. **Вычисленіе объемовъ (кубатура).** Подобно тому, какъ вычисленіе площадей приводилось къ опредѣленію предѣла суммы элементарныхъ площадей, такъ и измѣреніе объемовъ сводится къ опредѣленію предѣла суммы элементарныхъ объемовъ. Въ зависимости отъ вида элементарнаго объема задача приводитъ къ простому, двойному или тройному интеграламъ. Разсмотримъ три вида элементарныхъ объемовъ.

1. Пусть поверхность, ограничивающая данный для вычисленія объемъ, отнесена къ прямоугольной системѣ осей координатъ. Пересѣчемъ ее плоскостями, перпендикулярными къ оси x (черт. 79). Эти плоскости разобьютъ данный объемъ на рядъ слоевъ; каждый изъ нихъ замѣнимъ прямымъ цилиндромъ, основаніями котораго служатъ одно изъ сосѣднихъ сѣченій поверхности и проекція его на другое, а высотой разстояніе между ними. Называя площадь сѣченія черезъ u и разстояніе между основаніями слоя черезъ Δx, находимъ, что объемъ этого цилиндра равенъ $u\Delta x$. Суммируя цилиндры, входящіе въ данный объемъ, и переходя къ *предѣлу* суммы при $\Delta x = 0$, находимъ искомый объемъ V:

$$V=\int_a^b u dx, \quad . \; . \; . \quad (132)$$

гдѣ a и b суть крайнія значенія x для точекъ даннаго объема.

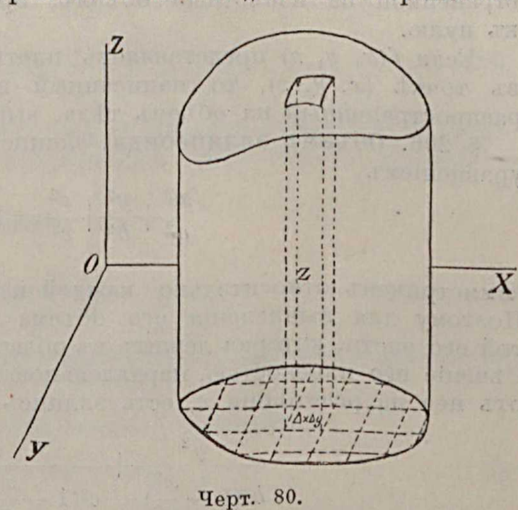


Черт. 79.

Эта формула примѣняется въ томъ случаѣ, когда извѣстно выраженіе площади u черезъ x.

2. Пусть данный для вычисленія объемъ ограниченъ частью поверхности, опредѣляемой въ прямоугольныхъ координатахъ уравненіемъ $z=f(x, y)$, нѣкоторой цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси z, и частью плоскости xy (черт. 80).

Посредствомъ ряда плоскостей, параллельныхъ плоскости yz, и ряда плоскостей, параллельныхъ плоскости xz, данный объемъ разбивается на столбики, отличающіеся отъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ тѣмъ, что вмѣсто плоскаго верхняго основанія каждый изъ нихъ сверху ограниченъ частью данной поверхности.



Черт. 80.

Основаніями ихъ служатъ элементарные прямоугольники. Если точка (x, y, z) есть одна изъ вершинъ верхняго основанія столбика, а Δx и Δy суть разстоянія между двумя сосѣдними плоскостями, параллельными соотвѣтственно плоскостямъ yz и xz, то объемъ столбика можно замѣнить объемомъ прямоугольнаго параллелепипеда съ основаніемъ $\Delta x \Delta y$ и высотою z, т.-е. принять равнымъ $z\Delta x\Delta y$. Суммируя объемы параллелепипедовъ, входящихъ въ данный объемъ, и переходя къ *предѣлу* суммы при $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, найдемъ искомый объемъ V выраженнымъ черезъ двойной интегралъ:

$$V = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} z dx dy, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (133)$$

при чемъ предѣлы интегрированій опредѣляются такъ, какъ было указано въ § 204.

3. Данный объемъ можно разбить на элементарные посредствомъ трехъ системъ плоскостей, изъ которыхъ плоскости одной системы параллельны плоскости xy, другой — плоскости yz и третьей — плоскости xz. Элементарнымъ объемомъ въ этомъ случаѣ служитъ объемъ $\Delta x\Delta y\Delta z$ прямоугольнаго параллелепипеда съ ребрами Δx, Δy и Δz. Искомый объемъ V выразится предѣломъ тройной суммы $\Sigma\Sigma\Sigma\Delta x\Delta y\Delta z$, распространенной на данный объемъ, или *тройнымъ* интеграломъ:

$$V = \int\int\int dx dy dz, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (134)$$

при чемъ предѣлы интегрированія опредѣляются на основаніи соображеній, аналогичныхъ указаннымъ въ § 204 при разсмотрѣніи двойного интеграла.

Тройной интегралъ общаго типа таковъ:

$$\iiint f(x, y, z)dxdydz.$$

Онъ есть предѣлъ тройной суммы $\Sigma\Sigma\Sigma f(x, y, z)\Delta x\Delta y\Delta z$, распространенной на извѣстный объемъ, при стремленіи Δx, Δy и Δz къ нулю.

Если $f(x, y, z)$ представляетъ плотность неоднороднаго тѣла въ точкѣ (x, y, z), то написанный выше тройной интегралъ, распространенный на объемъ тѣла, выразитъ его массу *).

§ 206. **Объемъ эллипсоида.** Эллипсоидъ (§ 78), опредѣляемый уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

симметриченъ относительно каждой изъ плоскостей координатъ. Поэтому для вычисленія его объема достаточно найти объемъ той его части, которая лежитъ въ области положительныхъ x-овъ. Сѣченіе его плоскостью, параллельною плоскости yz и отстоящей отъ нея на разстояніе x, есть эллипсъ

$$\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}+\frac{c}{c^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=1.$$

Полуоси этого эллипса суть $b\sqrt{a^2-x^2}/a$ и $c\sqrt{a^2-x^2}/a$, а площадь равна $\pi bc(a^2-x^2)/a^2$ (§ 203). Зная это, можно для вычисленія объема V эллипсоида воспользоваться формулой (132), положивъ въ ней $u=\pi bc(a^2-x^2)/a^2$, $a=0$, $b=a$ и кромѣ того удвоивъ интегралъ второй части, такъ что

$$V=\frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx.$$

Произведя вычисленія, найдемъ:

$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Если $a=b=c$, то эллипсоидъ обращается въ шаръ радіуса a, и предыдущая формула даетъ извѣстную формулу объема шара: $V=4\pi a^3/3$.

---

*) Подробности о двойныхъ и тройныхъ интегралахъ см. въ указанномъ на стр. 266 курсѣ *А. К. Власова*.

§ 207. **Объемъ тѣла вращенія.** Формулой (132) можно воспользоваться для вычисленія объема тѣла, образованнаго вращеніемъ кривой $y=f(x)$ около оси x. Не трудно видѣть, что для этого случая площадь u есть площадь круга, центръ котораго находится на оси x, а радіусъ равняется ординатѣ вращающейся кривой, т.-е.

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx \quad \ldots\ldots (135)$$

Примѣръ 1. Парабола $y^2=2px$ вращается около оси x. Опредѣлить объемъ сегмента полученнаго параболоида (§ 89) съ высотою h.

По формулѣ (135) находимъ:

$$V=2p\pi\int_0^h xdx=p\pi h^2.$$

Упражненіе. *Сравнить объемы параболоическаго сегмента и прямого цилиндра, имѣющихъ общія основаніе и высоту.*

Примѣръ 2. Кругъ, опредѣляемый уравненіемъ

$$x^2+(y-b)^2=a^2, \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

гдѣ $a<b$, вращается около оси x. Опредѣлить объемъ получаемаго при этомъ вращеніи кольца (*tore*).

Центръ C даннаго круга находится на оси y (черт. 81). Проведя черезъ него прямую AB, параллельную оси x, мы раздѣлимъ окружность на двѣ равныя дуги ADB и $AD'B$. По формулѣ (135) искомый объемъ V выразится такъ:

$$V=\pi\int_{-a}^{+a}(y_1{}^2-y_2{}^2)dx,$$

Черт. 81.

гдѣ y_1 обозначаетъ ординату дуги ADB, а y_2—ординату дуги $AD'B$. Чтобы найти y_1 и y_2, рѣшимъ уравненіе (α) относительно y. Получимъ:

$$y_1=b+\sqrt{a^2-x^2},\ y_2=b-\sqrt{a^2-x^2}.$$

Отсюда находимъ:

$$y_1{}^2-y_2{}^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)=4b\sqrt{a^2-x^2}.$$

Подставляя найденное значеніе $y_1{}^2 - y_2{}^2$ въ выраженіе V и выполняя интегрированіе, получимъ:

$$V = 4\pi b . \frac{1}{2}\pi a^2 = 2\pi^2 a^2 b.$$

Примѣръ 3. Найти значеніе интеграла

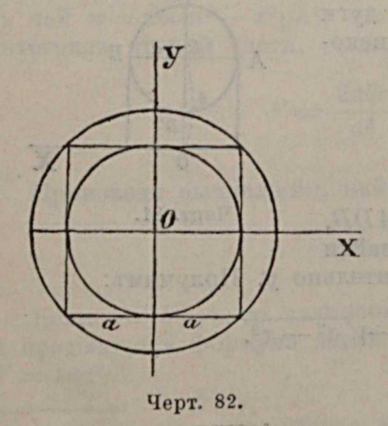
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Сравнивая данный интегралъ съ интеграломъ формулы (133), легко видѣть, что онъ выражаетъ объемъ V, заключенный между плоскостью xy и поверхностью, опредѣляемой уравненіемъ:

$$z = e^{-x^2-y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Сѣченія этой поверхности плоскостями $xz(y=0)$ и $yz(x=0)$ представляютъ соотвѣтственно кривыя $z=e^{-x^2}$ и $z=e^{-y^2}$, форма которыхъ была изучена въ § 137 (примѣръ 2). Сѣченія ея плоскостями, параллельными плоскости xy, т.-е. плоскостями $z=h$, гдѣ h есть постоянное число, представляютъ круги, опредѣляемые уравненіями $x^2+y^2=-logh$. При $0<h\leqslant 1$ радіусы этихъ круговъ $\sqrt{-logh}$ суть числа дѣйствительныя, а при значеніяхъ h, лежащихъ внѣ интервала (0,1),—мнимыя. Изъ этого слѣдуетъ, что разсматриваемая поверхность образуется вращеніемъ кривой $z=e^{-x^2}$ около оси z.

Для вычисленія V построимъ на плоскости xy квадратъ съ центромъ въ началѣ координатъ и сторонами $2a$, параллельными осямъ координатъ; впишемъ въ этотъ квадратъ кругъ и опишемъ около него кругъ (черт. 82). Радіусъ перваго$=a$, радіусъ второго$=a\sqrt{2}$.



Черт. 82.

Объемъ V есть предѣлъ (§ 160), къ которому стремится объемъ V', ограниченный указаннымъ выше квадратомъ, плоскостями, параллельными плоскостямъ координатъ и проходящими черезъ стороны квадрата, и частью поверхности (β), когда размѣры квадрата неограниченно возрастаютъ, т.-е.

$$V = \lim V' = \lim_{a=\infty}\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Двойной интегралъ второй части распространяется на квадратъ со стороною $2a$. Распространяя его на кругъ, вписанный въ этотъ квадратъ, и на кругъ, описанный около него, мы получимъ два объема V_1 и V_2, между которыми лежитъ V', такъ что

$$V_1 < V' < V_2.$$

Но объемъ V_1 и V_2 легко вычислить, замѣнивъ прямоугольныя координаты полярными. Замѣтивъ, что $x^2+y^2=r^2$ и что элементъ площади въ полярныхъ координатахъ выражается черезъ $rdrd\varphi$, находимъ:

$$V_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^a e^{-r^2} r dr d\varphi.$$

Такъ какъ

$$\int_0^a e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} e^{-t}dt = -\left[\frac{1}{2}e^{-t}\right]_0^{a^2} = \frac{1}{2}(1-e^{-a^2}),$$

то

$$V_1 = \pi(1-e^{-a^2}).$$

Точно также найдемъ, что

$$V_2 = \pi(1-e^{-2a^2}).$$

Поэтому

$$\pi(1-e^{-a^2}) < V' < \pi(1-e^{-2a^2}).$$

Такъ какъ e^{-a^2} и e^{-2a^2} при безграничномъ возрастаніи a стремятся къ нулю, то $\lim V' = \pi$ при $a=\infty$. Поэтому

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi.$$

Зная значеніе V, легко найти значеніе интеграла

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx,$$

играющаго выдающуюся роль въ теоріи вѣроятностей и ея приложеніяхъ.

Такъ какъ (§ 160)

$$J = \lim_{a=\infty}\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}dx,$$

а съ другой стороны

$$V' = \int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a} e^{-x^2-y^2} dx = \int_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx . \int_{-a}^{+a} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx\right)^2,$$

то $J^2 = \pi$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Упражненія.

1. *Написать уравненія касательныхъ къ эллипсу, гиперболѣ и параболѣ, данныхъ соотвѣтственно уравненіями* (34), (37) *и* (33), *въ точкѣ* (x, y) *этихъ кривыхъ.*

Отв. $xX/a^2 \mp yY/b^2 = 1$; $yY = p(X + x)$.

2. *Найти точку пересѣченія касательной къ параболѣ* (33) *съ осью* x *и вывести отсюда способъ построенія касательной.*

3. *Найти субтангенсы эллипса* (34) *и круга* $x^2 + y^2 = a^2$ *для точки съ абсциссою* x *и вывести отсюда способъ построенія касательной къ эллипсу въ данной его точкѣ.*

Отв. $(a^2 - x^2)/x$.

4. *Показать, что субтангенсъ кривой* $y = be^{x/a}$ *есть постоянная величина.*

5. *Показать, что кривыя*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2,$$

гдѣ n *есть какое-нибудь постоянное число, имѣютъ въ точкѣ* (a, b) *общую касательную, опредѣляемую уравненіемъ:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2.$$

6. *Найти выраженія радіуса кривизны параболы* (33), *эллипса* (34) *и гиперболы* (37).

Отв. 1) $(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}/p^2$; 2) $(a^2 - e^2x^2)^{\frac{3}{2}}/ab$; 3) $(e^2x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}/ab$.

7. *Показать, что эволюта параболы* (33) *опредѣляется уравненіемъ* $27p\eta^2 = 8(x - p)^3$ *и построить эту кривую.*

8. *Показать, что эволюта эллипса, даннаго уравненіями*

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi,$$

опредѣляется уравненіемъ:

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

9. *Показать, что площадь, ограниченная осью* x, *прямыми* $x = a$ *и* $x = b$ *и гиперболой* $xy = k^2$, *равна* $k^2 \log(b/a)$. — *Разсмотрѣть частный случай:* $k = 1$, $a = 1$.

10. *Показать, что площадь, ограниченная параболами* $y^2 = 2px$ *и* $x^2 = 2py$, *равна* $\frac{4}{3}p^2$.

11. *Вывести выраженіе объема пирамиды и конуса изъ формулы* (132).

12. *Гипербола* $x^2 - y^2 = a^2$ *вращается около оси* x. *Найти объемъ сегмента полученнаго гиперболоида съ высотою* a.

Отв. $\frac{4}{3}\pi a^3$.

13. *Полуволна синусоиды* $y = \sin x$ *вращается около оси* x. *Показать, что объемъ полученнаго тѣла равенъ половинѣ объема описаннаго около него цилиндра.*

14. *Найти объемъ той части тѣла, ограниченнаго плоскостями* $z = 0$, $z = kx$ *и цилиндрической поверхностью* $x^2 + y^2 = a^2$, *которая лежитъ въ области положительныхъ* z.

Отв. $\frac{2}{3} ka^3$.

15. *Найти объемъ, ограниченный сферой* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *и цилиндромъ* $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$.

Отв. $\frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{16}{9} a^3$.

ГЛАВА XX.

Интерполированіе. Интерполяціонная формула Лагранжа. Основанія теоріи конечныхъ разностей. Интерполяціонная формула Ньютона.

§ 208. **Задача интерполированія.** При изслѣдованіи путемъ наблюденія явленій природы или общественной жизни часто приходится сопоставлять два ряда чиселъ, изъ которыхъ одинъ представляетъ значенія нѣкоторой перемѣнной величины, а другой — *соотвѣтственныя* значенія второй перемѣнной величины. Указаніе на соотвѣтствіе значеній двухъ величинъ равносильно утвержденію, что между ними существуетъ функціональная зависимость, такъ что одну изъ нихъ можно взять за независимое перемѣнное, а другую за его функцію. Видъ указанной зависимости можетъ быть неизвѣстнымъ.

Задача, извѣстная подъ названіемъ *интерполированія*, заключается въ слѣдующемъ: *даны n значеній*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

перемѣннаго x *и* n *соотвѣтственныхъ значеній*

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

функціи $y = f(x)$. *Найти значеніе этой функціи для нѣкотораго значенія* $x = a$, *не содержащагося въ числѣ значеній* (α).

Въ болѣе узкомъ смыслѣ опредѣленіе $f(a)$ называется *интерполированіемъ*, если a лежитъ *внутри* интервала, заключающаго числа (a), если же a лежитъ внѣ указаннаго интервала, то опредѣленіе $f(a)$ называется *экстраполированіемъ*.

Если функція $f(x)$ неизвѣстна, то поставленная выше задача является неопредѣленной. Въ самомъ дѣлѣ, n паръ соотвѣтственныхъ значеній x и y, разсматриваемыхъ, какъ координаты точки на плоскости, опредѣляютъ на плоскости n точекъ, черезъ которыя нужно провести кривую $y=f(x)$. Ордината $f(x)$ этой кривой, соотвѣтствующая абсциссѣ $x=a$, есть искомое задачи. Но черезъ n точекъ можно провести безчисленное множество кривыхъ. Слѣдовательно, задача интерполированія допускаетъ безчисленное множество рѣшеній.

Неопредѣленность задачи можно устранить введеніемъ дополнительныхъ условій, которымъ должна удовлетворять функція $f(x)$. Обыкновенно этими условіями служатъ требованія *непрерывности* функціи $f(x)$ и *наибольшей простоты* ея аналитическаго выраженія. Оба требованія выполняются, если за функцію $f(x)$ возьмемъ цѣлый многочленъ возможно низкой степени, содержащій столько коэффиціентовъ, чтобы, выбирая ихъ надлежащимъ образомъ, можно было дать ему указанныя въ задачѣ значенія для извѣстныхъ значеній перемѣннаго.

Такъ какъ число данныхъ соотвѣтственныхъ значеній перемѣннаго и функціи равно n, то такимъ многочленомъ является многочленъ

$$p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_{n-1}x^{n-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\gamma)$$

$(n-1)$-ой степени, содержащій n коэффиціентовъ, для опредѣленія которыхъ служитъ система линейныхъ уравненій:

$$\begin{aligned}
p_0+p_1x_1+p_2x_1{}^2+\ldots+p_{n-1}x_1{}^{n-1}&=y_1,\\
p_0+p_1x_2+p_2x_2{}^2+\ldots+p_{n-1}x_2{}^{n-1}&=y_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
p_0+p_1x_n+p_2x_n^2+\ldots+p_{n-1}x_n{}^{n-1}&=y_n.
\end{aligned}$$

Теоретически рѣшеніе этой системы уравненій относительно p не представляетъ никакихъ затрудненій. Но на практикѣ, когда число n является большимъ, важно имѣть такіе пріемы, которые бы упрощали и сокращали всѣ вычисленія, нужныя для опредѣленія коэффиціентовъ p.

Въ слѣдующихъ §§ указаны двѣ интерполяціонныя формулы *(Лагранжа и Ньютона)*, которыя служатъ для этой цѣли.

Интерполированіе при помощи многочлена (γ) называется *параболическимъ*, такъ какъ оно, въ геометрической постановкѣ за-

дачи, состоитъ въ проведеніи параболы $(n-1)$-аго порядка черезъ n данныхъ точекъ.

§ 209. **Интерполяціонная формула Лагранжа.** Задача, которую рѣшаетъ формула Лагранжа, состоитъ въ слѣдующемъ: *составить цѣлый многочленъ $(n-1)$-ой степени, принимающій при значеніяхъ*

$$x_1, x_2, .., x_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

перемѣннаго x соотвѣтственно значенія

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

при чемъ числа (α) всѣ различны между собою.

Составимъ сначала цѣлую функцію $\varphi(x)$, обращающуюся въ нуль при каждомъ изъ значеній (α) (см. § 151):

$$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Въ раскрытомъ видѣ $\varphi(x)$ представляетъ цѣлый многочленъ n-ой степени. Производная его выражается слѣдующимъ образомъ (§ 127):

$$\varphi'(x) = \varphi(x)\left[\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_n}\right].$$

Отсюда находимъ:

$$\varphi'(x_k) = \lim_{x=x_k} \frac{\varphi(x)}{x-x_k} = (x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что функція

$$\frac{1}{\varphi'(x_k)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x-x_k}$$

обращается въ нуль при всѣхъ значеніяхъ (α) перемѣннаго x кромѣ x_k, а для $x = x_k$ она обращается въ 1.

Поэтому функція

$$\frac{y_1}{\varphi'(x_1)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x-x_1} + \frac{y_2}{\varphi'(x_2)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x-x_2} + \ldots + \frac{y_n}{\varphi'(x_n)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x-x_n},$$

представляющая въ раскрытомъ видѣ многочленъ $(n-1)$-ой степени и принимающая при значеніяхъ (α) перемѣннаго x значенія (β), есть искомая. Итакъ,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{y_k}{\varphi'(x_k)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x-x_k},$$

или въ другой формѣ

$$f(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)..(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)..(x_1-x_n)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)..(x_2-x_n)}y_2+\dots$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)..(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)..(x_n-x_{n-1})}y_n \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (136)$$

Эта формула есть *интерполяціонная формула Лагранжа.*

§ 210. **Конечныя разности различныхъ порядковъ.** Для вывода интерполяціонной формулы Ньютона нужно познакомиться съ основаніями *теоріи конечныхъ разностей.*

Пусть мы имѣемъ нѣкоторую функцію $f(x)$ перемѣннаго x.

Приращеніе $\Delta f(x)$ функціи, когда x получаетъ приращеніе Δx, называется *конечной разностью* или, просто, *разностью функціи* $f(x)$; изъ опредѣленія слѣдуетъ, что

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Въ теоріи конечныхъ разностей разсматривается *прерывное* измѣненіе независимаго перемѣннаго, при чемъ приращенія, посредствомъ которыхъ совершается переходъ отъ одного значенія къ слѣдующему за нимъ, считаются равными. Такимъ образомъ, если $\Delta x=h$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$ суть послѣдовательныя значенія перемѣннаго, то

$$x_2-x_1=x_3-x_2=\dots=x_n-x_{n-1}=h.$$

Составивъ для этихъ значеній перемѣннаго x значенія функціи $f(x)$, получимъ рядъ чиселъ:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\dots,\ f(x_{n-1}),\ f(x_n).$$

Черезъ вычитаніе каждаго члена этого ряда изъ послѣдующаго находимъ разности функціи $f(x)$:

$$f(x_2)-f(x_1)=\Delta f(x_1);\ f(x_3)-f(x_2)=\Delta f(x_2);\dots;\ f(x_n)-f(x_{n-1})=\Delta f(x_{n-1}).$$

Эти разности называются *первыми* разностями или разностями *перваго* порядка.

Прилагая указанный процессъ къ первой разности, которая, вообще говоря, есть также функція x, мы получимъ разности первыхъ разностей, которыя называются по отношенію къ функціи $f(x)$ *вторыми* разностями или разностями *второго* порядка и обозначаются символомъ Δ^2, такъ что

$$\Delta^2 f(x_1)=\Delta f(x_2)-\Delta f(x_1);\ \Delta^2 f(x_2)=\Delta f(x_3)-\Delta f(x_2);\dots\dots$$

Тѣмъ же путемъ можно составить разности третьяго, четвертаго и, вообще, n-аго порядка.

Примѣръ. Если $f(x)=x^2$, то при $h=1$ и $x_1=1$ легко составить слѣдующую таблицу:

x	x^2	Δx^2	$\Delta^2 x^2$	$\Delta^3 x^2$
1	1	3	2	0
2	4	5	2	0
3	9	7	2	
4	16	9		
5	25			

Первый столбецъ таблицы представляетъ значенія перемѣннаго x, второй—значенія функціи x^2, третій, четвертый и пятый содержатъ разности соотвѣтственно перваго, второго и третьяго порядковъ.

§ 211. **Главныя свойства конечной разности.** Укажемъ главныя свойства конечной разности, вытекающія изъ ея опредѣленія.

a) Разность функціи, сохраняющей постоянное значеніе, равна нулю. Въ символахъ это свойство выражается равенствомъ: $\Delta C=0$, гдѣ C есть постоянное число.

b) Разность функціи періодической равна нулю, если періодъ ея равенъ приращенію h перемѣннаго.

c) При вычисленіи разности можно выносить за знакъ разности постояннаго множителя: $\Delta Cf(x)=C\Delta f(x)$.

д) Разность алгебраической суммы равна суммѣ разностей слагаемыхъ.

§ 212. **Разность степени.** $f(x)=x^n$, гдѣ n есть натуральное число. Составимъ разность этой функціи:

$$\Delta x^n=(x+h)^n-x^n=nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}h^2x^{n-2}+\ldots+h^n.$$

Эта формула показываетъ, что первая разность степени выражается многочленомъ, степень котораго на 1 меньше n, т.-е. показателя данной степени.

Такъ какъ разность многочлена равна алгебраической суммѣ разностей его членовъ (§ 211,$д$), то первая разность многочлена n-ой степени выражается многочленомъ $(n-1)$-ой степени, вторая — многочленомъ $(n-2)$-ой степени, . . . , n-ая — многочленомъ

нулевой степени, т.-е. постояннымъ числомъ, а разности порядковъ выше n обращаются въ нули (§ 211,a).

Не трудно убѣдиться что

$$\Delta^n x^n = 1.2\ldots nh^n,$$
$$\Delta^n(p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_n) = 1.2\ldots np_0h^n.$$

§ 213. **Факторіальная функція и ея разность.** *Факторіальной* функціей или *факторіаломъ* называется функція вида:

$$x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h].$$

Обозначимъ эту функцію черезъ $x^{(m\,|\,h)}$ и найдемъ ея разность:

$$\Delta x^{(m|h)} = (x+h)x(x-h)\ldots[x-(m-2)h] - x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h] =$$
$$= x(x-h)\ldots[x-(m-2)h]\{(x+h)-[x-(m-1)h]\} =$$
$$= x(x-h)\ldots[x-(m-2)h].mh = mhx^{(m-1|h)}.$$

При $h=1$ факторіалъ представляетъ произведеніе

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$$

m уменьшающихся на единицу множителей; онъ обозначается символомъ $x^{(m)}$; разность его выражается формулой

$$\Delta x^{(m)} = mx^{(m-1)},$$

аналогичной формулѣ (76).

Изъ этой формулы легко вывести слѣдующія выраженія для разностей высшихъ порядковъ:

$$\Delta^2 x^{(m)} = m(m-1)x^{(m-2)};\ \Delta^3 x^{(m)} = m(m-1)(m-2)x^{(m-3)};\ldots$$
$$\Delta^m x^{(m)} = m(m-1)\ldots 2.1;\ \Delta^n x^{(m)} = 0 \text{ для } n > m.$$

§ 214. **Выраженіе n-ой разности черезъ послѣдовательныя значенія функціи и обратная задача.** Если обозначимъ для краткости функцію $f(x)$ черезъ y, а значенія ея для значеній

$$x,\ x+h,\ x+2h,\ldots,\ x+nh,\ldots$$

перемѣннаго x черезъ

$$y_x,\ y_{x+h},\ y_{x+2h},\ldots,\ y_{x+nh},\ldots$$

то по опредѣленію разности найдемъ равенства:

$$\Delta y_x = y_{x+h} - y_x;$$
$$\Delta^2 y_x = (y_{x+2h} - y_{x+h}) - (y_{x+h} - y_x) = y_{x+2h} - 2y_{x+h} + y_x;$$
$$\Delta^3 y_x = (y_{x+3h} - 2y_{x+2h} + y_{x+h}) - (y_{x+2h} - 2y_{x+h} + y_x) =$$
$$= y_{x+3h} - 3y_{x+2h} + 3y_{x+h} - y_x.$$

Замѣчая, что коэффиціенты въ правыхъ частяхъ двухъ послѣднихъ формулъ суть коэффиціенты разложеній 2-ой и 3-ьей степени бинома, по аналогіи напишемъ выраженіе разности $\Delta^n y_x$:

$$\Delta^n y_x = y_{x+nh} - C_n^1 y_{x+(n-1)h} + C_n^2 y_{x+(n-2)h} - \ldots + (-1)^n y_x, \ldots (\delta)$$

гдѣ C со значками суть биноміальные коэффиціенты. Для доказательства справедливости этой формулы примѣняютъ способъ заключенія отъ n къ $n+1$, т.-е., допуская справедливость ея для числа n, составляютъ при помощи этой формулы выраженіе для $\Delta^{n+1} y_x$ и показываютъ, что полученное выраженіе получается изъ формулы (δ) замѣной n черезъ $n+1$.

Такимъ же пріемомъ рѣшается и обратная задача, т.-е. задача о выраженіи y_{x+nh} черезъ послѣдовательныя разности.

Изъ опредѣленія разности слѣдуетъ, что

$$y_{x+h} = \Delta y_x + y_x.$$

Изъ этого равенства выводимъ слѣдующія:

$$\begin{aligned} y_{x+2h} &= \Delta(\Delta y_x + y_x) + (\Delta y_x + y_x) = \Delta^2 y_x + 2\Delta y_x + y_x; \\ y_{x+3h} &= \Delta(\Delta^2 y_x + 2\Delta y_x + y_x) + (\Delta^2 y_x + 2\Delta y_x + y_x) = \\ &= \Delta^3 y_x + 3\Delta^2 y_x + 3\Delta y_x + y_x. \end{aligned}$$

Отсюда по аналогіи пишемъ выраженіе для y_{x+nh}:

$$y_{x+nh} = \Delta^n y_x + C_n^1 \Delta^{n-1} y_x + C_n^2 \Delta^{n-2} y_x + \ldots + y_x,$$

гдѣ C со значками суть биноміальные коэффиціенты. Справедливость этой формулы доказывается способомъ заключенія отъ n къ $n+1$.

§ 215. **Интерполяціонная формула Ньютона.** Формула Ньютона рѣшаетъ ту же задачу, которую рѣшаетъ формула Лагранжа (§ 209), но для того случая, когда значенія перемѣннаго x, т.-е. $x_1, x_2, \ldots, x_n$, суть числа, равноотстоящія другъ отъ друга.

Пусть

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h.$$

Возьмемъ многочленъ

$$\left.\begin{aligned} y = p_0 + p_1(x - x_1) + p_2(x - x_1)(x - x_1 - h) + \\ + p_3(x - x_1)(x - x_1 - h)(x - x_1 - 2h) + \ldots \\ + p_{n-1}(x - x_1)(x - x_1 - h)(x - x_1 - 2h) \ldots (x - x_1 - n - 2h) \end{aligned}\right\} \ldots (\varepsilon)$$

($n-1$)-ой степени и опредѣлимъ коэффиціенты p такъ, чтобы для $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ значенія его были соотвѣтственно равны $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Для этого нужно, чтобы коэффиціенты p удовлетворяли слѣдующей системѣ уравненій:

$$\begin{aligned}
&y_1 = p_0;\\
&y_2 = p_0 + p_1 h;\\
&y_3 = p_0 + 2p_1 h_1 + 2.1.p_2 h^2;\\
&y_4 = p_0 + 3p_1 h + 3.2p_2 h^2 + 3.2.1p_3 h^3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_n = p_0 + (n-1)p_1 h + (n-1)(n-2)p_2 h^2 + \ldots +\\
&\quad + (n-1)(n-2)\ldots 2.1.p_{n-1} h^{n-1}.
\end{aligned}$$

Первое изъ этихъ уравненій даетъ значеніе коэффиціента p_0. Для опредѣленія p_1 вычтемъ почленно каждое уравненіе изъ послѣдующаго. Получимъ (§ 210):

$$\begin{aligned}
&\Delta y_1 = p_1 h;\\
&\Delta y_2 = p_1 h + 2.1p_2 h^2;\\
&\Delta y_3 = p_1 h + 2.2p_2 h^2 + 3.2.1p_3 h^3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta y_{n-1} = p_1 h + 2.(n-2)p_2 h^2 + 3(n-2)(n-3)p_3 h^3 +\\
&\quad + 4(n-2)(n-3)(n-4)p_4 h^4 + \ldots\\
&\quad + (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.1.p_{n-1} h^{n-1}.
\end{aligned}$$

Первое изъ этихъ уравненій даетъ значеніе p_1. Для опредѣленія слѣдующаго коэффиціента составимъ вторыя разности функціи y:

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 y_1 = 2.1p_2 h^2;\\
&\Delta^2 y_2 = 2.1.p_2 h^2 + 3.2.1p_3 h^3:\\
&\Delta^2 y_3 = 2.1p_2 h^2 + 3.2.2.p_3 h^3 + 4.3.2.1p_4 h^4.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Первое изъ этихъ уравненій даетъ значеніе p_2. Ясно, что, продолжая составленіе разностей высшихъ порядковъ, мы будемъ получать системы уравненій, первыя изъ которыхъ доставятъ послѣдовательно значенія p_3, p_4, . . ., p_{n-1}.

Значенія эти слѣдующія:

$$p_0 = y_1;\ p_1 = \frac{\Delta y_1}{h};\ p_2 = \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2 y_1}{h^2};\ p_3 = \frac{1}{1.2.3}\frac{\Delta^3 y_1}{h^3};\ldots$$

$$p_{n-1} = \frac{1}{1.2..(n-1)}\cdot\frac{\Delta^{n-1} y_1}{h^{n-1}}.$$

Подставляя эти значенія p въ многочленъ (ε), находимъ

$$\left.\begin{array}{l} y = y_1 + \dfrac{x - x_1}{1} \dfrac{\Delta y_1}{h} + \dfrac{(x - x_1)(x - x_1 - h)}{1.2} \cdot \dfrac{\Delta^2 y_1}{h^2} + \\ + \dfrac{(x - x_1)(x - x_1 - h)(x - x_1 - 2h)}{1.2.3} \cdot \dfrac{\Delta^3 y_1}{h^3} + \ldots \\ + \dfrac{(x - x_1)(x - x_1 - h)\ldots(x - x_1 - \overline{n-2}h)}{1.2\ldots(n-1)} \cdot \dfrac{\Delta^{n-1} y_1}{h^{n-1}}. \end{array}\right\} \quad (137)$$

Эта формула называется интерполяціонной формулой Ньютона.

§ 216. **Погрѣшность интерполяціонныхъ формулъ.** Когда интерполяціонными формулами пользуются для вычисленія значенія *извѣстной* функціи $\varphi(x)$ при $x = a$, зная ея значенія при $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, то является вопросъ о степени точности получаемаго при этомъ результата.

Этотъ результатъ представляетъ значеніе $f(a)$ интерполяціоннаго многочлена, входящаго въ формулы (136) и (137), а погрѣшность вычисленія выражается разностью $\varphi(a) - f(a)$. Оцѣнка величины этой разности рѣшаетъ вопросъ о степени точности результата вычисленія по интерполяціонной формулѣ.

Найдемъ выраженіе этой разности.

Пусть

$$\varphi(a) - f(a) = K.$$

Составимъ функцію $F(x)$ слѣдующимъ образомъ:

$$F(x) = \varphi(x) - f(x) - K \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(a - x_1)(a - x_2)\ldots(a - x_n)}.$$

Легко видѣть, что функція $F(x)$ обращается въ нуль при $x = x_1, x_2, \ldots, x_n, a$. Весь интервалъ, опредѣляемый наименьшимъ и наибольшимъ изъ этихъ чиселъ, разбивается на n интерваловъ, въ каждомъ изъ которыхъ, по теоремѣ Ролля (§ 135), лежитъ по крайней мѣрѣ одинъ корень производной $F'(x)$ функціи $F(x)$. Слѣдовательно, въ указанномъ выше интервалѣ функція $F'(x)$ имѣетъ по крайней мѣрѣ n корней. Поэтому въ томъ же интервалѣ функція $F''(x)$ имѣетъ по крайней мѣрѣ $(n-1)$ корней, функція $F'''(x)$—по крайней мѣрѣ $(n-2)$ корней, ..., функція $F^{(n)}(x)$—по крайней мѣрѣ одинъ корень.

Но

$$F^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) - \frac{1.2\ldots nK}{(a - x_1)(a - x_2)\ldots(a - x_n)},$$

такъ какъ $f^{(n)}(x)$, какъ n-ая производная многочлена $(n-1)$-ой степени, обращается въ нуль.

Поэтому существуетъ число ξ, лежащее между наименьшимъ и наибольшимъ изъ чиселъ $x_1, x_2 \ldots, x_n, a$, которое служитъ корнемъ $F^{(n)}(x)$, т.-е.

$$\varphi^{(n)}(\xi) - \frac{1.2\ldots n.K}{(a-x_1)(a-x_2)\ldots(a-x_n)} = 0.$$

Отсюда находимъ:

$$K = \frac{(a-x_1)(a-x_2)\ldots(a-x_n)}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(\xi).$$

По этой формулѣ можно найти наибольшее значеніе K, когда неизвѣстное намъ число ξ лежитъ въ данномъ интервалѣ, и тѣмъ самымъ оцѣнить ошибку, являющуюся результатомъ употребленія интерполяціонной формулы.

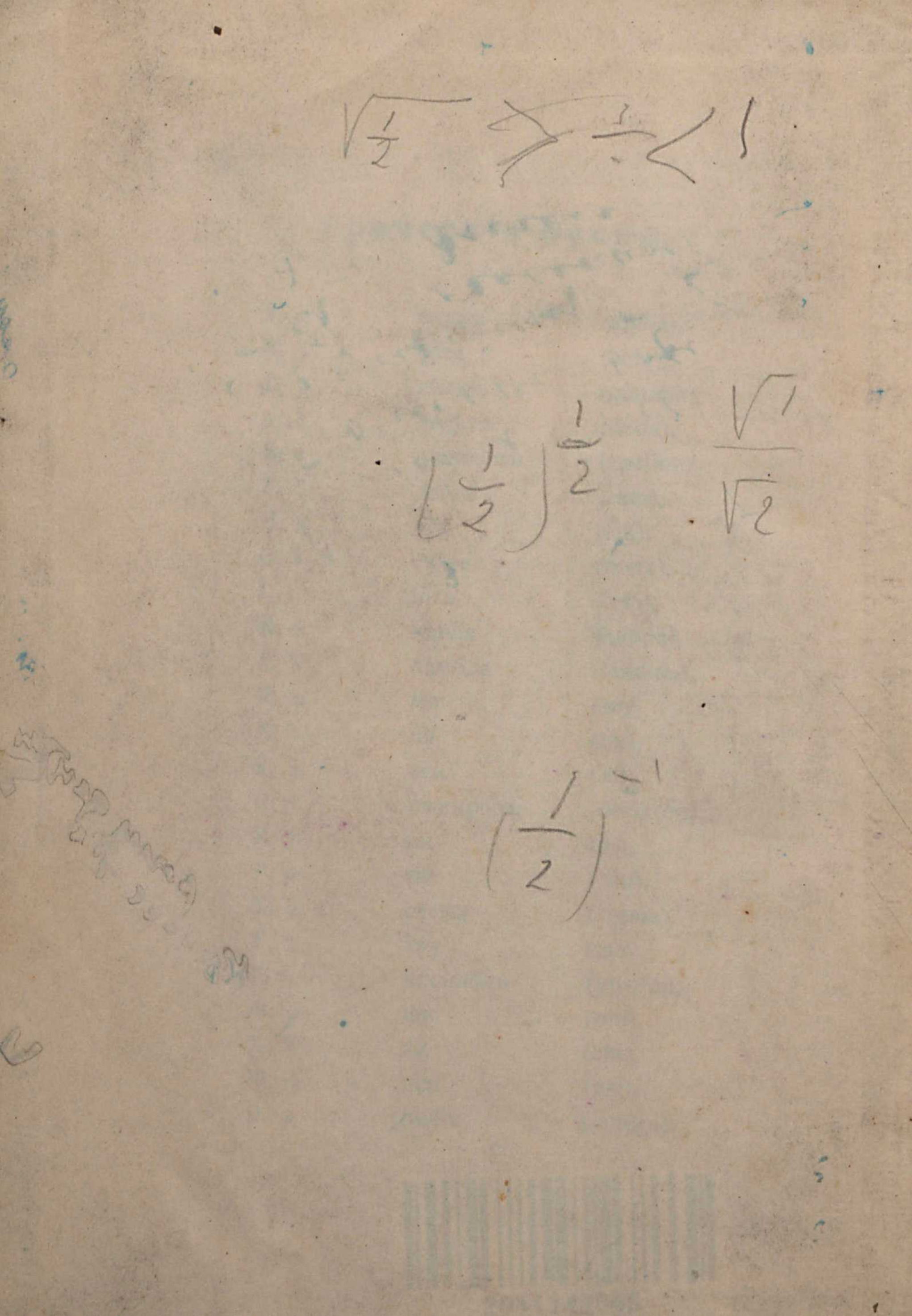
ОГЛАВЛЕНІЕ.

(Цифры указываютъ страницы).

Стр.

Греческія буквы.

Α, α	а́льфа	(alpha),
Β, β	бэ́та	(beta),
Γ, γ	га́мма	(gamma),
Δ, δ	де́льта	(delta),
Ε, ε	эпсило́нъ	(epsilon),
Ζ, ζ	дзэ́та	(zeta),
Η, η	э́та	(eta),
Θ, θ, ϑ	тхэ́та	(theta),
Ι, ι	іо́та	(iota),
Κ, κ	ка́ппа	(kappa),
Λ, λ	ла́мбда	(lambda),
Μ, μ	ми	(my),
Ν, ν	ни	(ny),
Ξ, ξ	кси	(xi),
Ο, ο	омикро́нъ	(omikron),
Π, π	пи	(pi),
Ρ, ρ	ро	(rho),
Σ, σ, ς	си́гма	(sigma),
Τ, τ	та́у	(tau),
Υ, υ	ипсило́нъ	(ypsilon),
Φ, φ	фи	(phi),
Χ, χ	хи	(chi),
Ψ, ψ	пси	(psi),
Ω, ω	оме́га	(omega).



$\sqrt{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2} < 1$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

Цѣна 1 руб. 75 коп.